



UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO

**MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN NIVEL
SUPERIOR**

***“UN SISTEMA DE TAREAS PARA MEJORAR LA CALIDAD DEL
PROCESO DE APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO”***

Postulante: Ing. Darío José Lutfi

Directora: Mg. Analía Patricia Mena

Comisión de Supervisión:

Mg. Lidia Esper

Mg. Elsa Rodríguez Areal de Torino

AÑO 2017

**Trabajo de Tesis para optar al Grado Académico de Magíster en
la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior**

AGRADECIMIENTOS

A la Directora de esta Tesis Mg. Analía Patricia Mena por su eficiente y profesional dirección, a su valiosa corrección detallada y análisis crítico de esta Tesis. Sobre todo por su calidad humana en su guía y su empuje en la dirección de este trabajo que hizo posible su logro.

A la Mg. Lidia Esper miembro de la Comisión de Supervisión de esta Tesis por su invaluable esfuerzo brindado al comienzo de la elaboración de esta tesis. A sus valiosos aportes y a todos los docentes que dictaron las asignaturas de esta carrera.

A los miembros de la comisión de supervisión por su apoyo brindado en los momentos oportunos. Al Dr. Guillermo Pérez Pantaleón, por su esfuerzo en la gestión y organización de esta carrera. A sus valiosos aportes a todos los docentes ya que es un honor tenerlo como profesor. Por su calidad humana que en todo momento alienta a las personas a superarnos con sus palabras y su ejemplo.

A la Mg. Elsa Rodríguez Areal de Torino, miembro de la Comisión de Supervisión, por el gran profesionalismo, por las múltiples ayudas de su reconocida capacidad y por su entrega personal.

Al Decano de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias Ing. José Manuel Salgado de la Universidad Nacional de Santiago del Estero por haber confiado en mí, a las autoridades de la Facultad y a los distintos Profesores que colaboraron en el desarrollo de este trabajo.

A mis compañeros de la Cátedra de Análisis Matemático, por la comprensión y apoyo, y a los alumnos que participaron en las actividades propuestas para la experiencia.

A mi señora, mis hijos, por su ayuda, apoyo y aliento incondicional.

RESUMEN

Este trabajo es un estudio realizado con el propósito de mejorar la calidad del aprendizaje de los estudiantes de las carreras de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero. Para tal fin se diseñó e implementó un sistema de tareas propuesto en las clases prácticas de la asignatura Análisis Matemático. La misma consistió en incorporar en el material de enseñanza-aprendizaje un “Sistema de Tareas” delimitado a la Derivada y sus Aplicaciones orientadas a desarrollar, con la competencia en la resolución de situaciones problemáticas extraídas de materias específicas de la especialidad de años posteriores.

Se planteó como Hipótesis de Investigación que la incorporación de dicho Sistema de Tareas contribuye a mejorar la calidad del aprendizaje.

Para elaborar la propuesta se examinó críticamente el modelo de enseñanza vigente en la asignatura motivo de estudio. Además, se estudiaron las tendencias actuales en educación matemática y en la formación en Ingeniería, se hizo un estudio exhaustivo para elaborar un tesoro en donde se determinó en que materias se aplica el concepto de Aplicación de la Derivada.

Se elaboró el marco teórico seleccionándose los Enfoques Cognitivo e Histórico Cultural con los aportes de tres teorías: la Teoría Psicogenética de Piaget, la teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel y la Teoría de Vigotsky además la importancia de la Resolución de Problemas de Polya. Del marco teórico se derivaron los Criterios que guiaron la investigación.

El diseño de la estrategia innovadora requirió realizar y validar un diagnóstico crítico de la asignatura Análisis Matemático y su modalidad de trabajo en las clases teóricas y prácticas.

Para caracterizar la competencia de control según el contexto de la propuesta se realizó una amplia revisión bibliográfica. Las opiniones que tienen los alumnos de cuestiones relacionadas con la Aplicación en Agronomía de la Derivada se investigaron mediante una encuesta, cuyos resultados aportaron para confirmar la importancia de las actividades propuestas y brindaron orientaciones para su implementación.

Se desarrolló un estudio descriptivo para identificar, analizar y seleccionar los errores y las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del tema Derivada y sus Aplicaciones en la asignatura Análisis Matemático que sirvió de base para diseñar las actividades propuestas.

Las actividades diseñadas se fundamentaron con los Criterios extraídos del marco teórico.

Se definió la variable a medir, Calidad del Aprendizaje, en sus dimensiones: grado de corrección y grado de reflexión. Para medir esta variable se optó por un diseño cuasi experimental con postprueba con un solo grupo. Se analizó si existieron cambios en la variable Calidad del Aprendizaje atribuibles al trabajo con la guía propuesta. Para ello, se tomaron los alumnos de Análisis Matemático de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero, años 2015.

Para evaluar la propuesta se aplicaron diferentes instrumentos de medición (observación, cuestionarios, actividades de pruebas parciales de los años 2015) con los que se obtuvieron datos que fueron procesados, analizados e interpretados, empleando técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales. Los resultados obtenidos permitieron corroborar la hipótesis formulada al inicio de la investigación.

Este trabajo origina nuevas líneas de investigación ya que es la primera experiencia de este tipo en la asignatura Análisis Matemático y puede ser utilizada en otras asignaturas tanto de la disciplina Matemática, como en otras áreas del conocimiento.

INDICE

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	III
INDICE	IV

CAPITULO I

1.- INTRODUCCIÓN	1
1.2 Marco Contextual	2
1.2.1 La asignatura Análisis Matemático	3
1.2.2 Análisis dado por la experiencia docente	4
1.3 Antecedentes de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.	7
1.4. – Importancia de la Resolución de Problemas	11
1.5.- Las Corrientes Psicopedagógicas	12
1.5.1.- El enfoque cognoscitivo de Piaget	13
1.5.2 Aprendizaje significativo	13
1.5.3 El funcionamiento de la inteligencia: Asimilación y Acomodación	13
1.5.4 El concepto de Esquema	14
1.5.5 El proceso de equilibración	15
1.5.6 Implicaciones educativas de la teoría de Piaget	16
1.6- Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky	18
1.6.1 Teoría de la Actividad Humana	21
1.7 La Actividad del Profesor	23
1.8 Teoría de la Formación de las Acciones Mentales por Etapas	29
a) Etapa motivacional	30
b) Etapa de la base orientadora de la acción (BOA)	31
c) Etapa material o materializada.	32
d) Etapa verbal	32
e) Etapa mental – organización de procesos	33

CAPITULO II

2.-INTRODUCCIÓN	38
2.1.- Diseño Teórico	42
2.1.2 Problema a investigar	42
2.1.3 Hipótesis	43
2.1.4 Objetivo General:	43
2.1.5 Objetivos Específicos:	44
2.1.6 Aportes de la Investigación	44
2.1.7 Definición de conceptual de las variables:	45
2.2. Diseño Metodológico	48
2.2.1 Los Paradigmas en esta Investigación	50
2.2.2 Investigación cuantitativa y cualitativa	51
2.2.3 Tipos de Investigación	52
2.2.4 Investigación Descriptiva:	53
2.2.5 Investigación Exploratoria:	53
2.2.6 Investigación Explicativa:	54
2.2.7 Tipo de investigación realizada según el alcance	55
2.2.8 Diseños experimentales:	56
2.3 Diseño de investigación seleccionado.	60
2.3.1 - Instrumentos y técnicas de esta investigación	61

CAPITULO III

Diseño del Sistema de Tareas

3.1.- Metodología para la confección del Sistema de Tareas.	66
3.2.- Fundamentos principales	67
3.3.- La Derivada.	69
3.3.1.- El Concepto	69
3.3.2.- De origen Didáctico o de Enseñanza	69
a.La derivada en un punto.	69
b.Dificultad para concebir a la derivada como una función y caracterizarla de manera global.	70
c.Tangencia local contra la concepción dinámica (sucesión de secantes).	70
d.La algebrización del cálculo diferencial escolar.	70
e.Los ejemplos prototípicos de un concepto.	71
f.Terminología que utiliza el texto.	71
g.Uso de la terminología matemática.	72
h.Desarrollo de la estructura lógica matemática.	72

i.Falta de enlace para crear una estructura conceptual.	72
3.3.3.- De origen Epistemológico	72
I.Desdoblamiento de la derivada.	72
II.El problema de calcular el ritmo de cambio.	73
III.El problema de encontrar la tangente a una curva dada.	74
IV.El problema de calcular valores máximos y mínimos de una función.	74
V.Dificultad en la interpretación del papel de las definiciones de la derivada en la actividad matemática.	74
VI.La derivada como un límite.	75
3.4.- Necesidades y requerimientos matemáticos del Ingeniero Agrónomo	75
3.4.1- Importancia del Tesoro	75
3.5.- Guía de estudio del tema derivada y sus aplicaciones	83
3.5.1 DERIVADA Y SUS APLICACIONES – 1 ^{ra} etapa	83
3.5.2 ESTRUCTURACION DE LAS CLASES PRÁCTICAS	85
3.6. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	85
3.6.1 Etapa materializada	85
3.6.1 Método en el aula:	86
3.6.2 Actividad de la etapa materializada – Aplicación de la Derivada	92
3.7 Etapa Verbal - Segunda Etapa	93
3.7.1 Método en el aula:	93
3.8 Etapa mental - Tercera etapa	95
3.8.1 Método en el Aula	95
3.8.2 Actividad de la etapa mental	95
3.1 ANÁLISIS DE LAS ENCUESTAS	96

CAPITULO IV

EL EXPERIMENTO Y SUS RESULTADOS

4. INTRODUCCIÓN	103
4.1 El experimento	103
4.2 Medición de la Variable Dependiente. Pretest - Postest. Análisis de los Resultados	104
4.3 Dimensiones, Indicadores y medidas de la Variable dependiente	105
Dimensión 1: “Grado de Conciencia o Reflexión”.	105
Dimensión 2: “Grado de Independencia”	109
Distribución porcentual de frecuencias del Grado de Independencia en el Pretest.	
Análisis Matemático. Año 2015	111

Distribución porcentual de frecuencias del Grado de Independencia en el Postest. Análisis Matemático. Año 2015	112
Distribución porcentual de frecuencias del Grado de Independencia según los resultados obtenidos en el Pretest y el Postest	112
 4.4 Confiabilidad y Validez de los Instrumentos de Medición	 120
Conclusiones	121
 Bibliografía	 123
Recomendaciones	129
Anexo I	130
Anexo II	132
Anexo III	140
Anexo IV	141
Anexo V: Pretest	145
Anexo VI: Post test	146

CAPITULO I

FUNDAMENTACIÓN TEORICA

1.- Introducción

Es conocido que la finalidad de la educación es la formación de convicciones personales, hábitos de conducta, y desarrollo integral del educando.

El perfeccionamiento de la educación es un proceso continuo del que forma parte la asimilación del progreso científico técnico. Por ello, la pedagogía contemporánea es incompatible con la enseñanza tradicional, con las clases que no estimulan un conocimiento sólido ni el desarrollo de pensamiento teórico y creativo.

La diversidad del conocimiento, la pluralidad de la ciencia, la velocidad de los cambios, ha marcado un problema en todos los ámbitos del saber. Es imprescindible, entre otras cosas, la formación del estudiante en habilidades y hábitos que lo preparen para aprender y, sobre todo, de manera integral a su personalidad, para lo cual una de las tantas formas de contribuir a este propósito, es la de formar el pensamiento científico.

Si se recuerda uno de los parámetros que sirven de indicadores para el desarrollo de este tipo de pensamiento es el que se expresa en el principio de integración del conocimiento y esto se logra de manera concreta cuando se considera la articulación interdisciplinaria.

Para estos fines se ha seleccionado, para la confección del Sistema de Tareas, el tema Derivada y sus Aplicaciones en el campo de la Ingeniería Agronómica, que al ser un tema muy general facilita su desarrollo vinculándolo con las principales disciplinas de la carrera.

La investigación pretende:

- 1.- Descubrir problemas importantes de las disciplinas específicas de la carrera que puedan ser utilizadas en las clases para el desarrollo del tema seleccionado, a través de la elaboración de un Tesauro.

2.- Elaborar un Sistema de Tareas basado en las teorías psicológicas del aprendizaje y en el uso de Modelos Matemáticos que se articulen con algunas asignaturas de la especialidad, especialmente en la resolución de problemas.

3.- Estructurar el proceso de enseñanza y aprendizaje en el tema Derivada y sus aplicaciones, considerando el plan de estudio de la carrera.

1.2 Marco Contextual

En la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero se dicta, entre otras, la carrera de Ingeniería Agronómica.

El Plan de estudios se desarrolla mediante diferentes actividades de formación que incluyen, Asignaturas Obligatorias, Cursos Optativos, Proyecto Final, Práctica Profesional Supervisada, Actividades de Formación Social y Humanística, etc. Las Asignaturas Obligatorias se organizan en dos bloques curriculares (Producción animal y Producción vegetal).

El Departamento de Ciencias Básicas está constituido por las asignaturas que constituyen el fundamento de sus correlativas. Su misión principal es contribuir a una sólida formación conceptual para el sustento de las disciplinas específicas, lo que implica la evolución permanente de los contenidos en función de los avances científicos y tecnológicos. Está organizado según tres áreas de conocimiento: Área de Matemática, Área de Física y Área de Química.

Los cursos de grado en Área de Matemática son: Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático y ambas se las dicta en el primer módulo de la carrera.

1.2.1 La asignatura Análisis Matemático

La investigación, se realizó en la asignatura Análisis Matemático, la cual forma parte del Área de Formación Básica de la carrera de Ingeniería Agronómica. El Plan de Estudios vigente (que data del año 2005) la ubica en el Primer Cuatrimestre del Primer Año, con una carga horaria semanal de 5 horas y una matrícula promedio de 80 estudiantes. Pre correlativas no posee y sus postcorrelativas son: Física, Topografía Agrícola y Bioestadística y Diseño. La carga horaria está distribuida en dos encuentros semanales, uno de dos horas reloj que corresponde a la Teoría de la misma y el otro de 3 horas correspondientes a la parte Práctica. En esta última, los alumnos se distribuyen en dos comisiones de 40 alumnos cada una. Las clases prácticas son de asistencia obligatoria.

La cátedra está constituida por un Profesor responsable, un Jefe de Trabajos Prácticos y dos Auxiliares Estudiantiles de Segunda. El Jefe de Trabajos Prácticos, responsable de este trabajo de tesis, es Ingeniero Electromecánico.

Los contenidos que abarcan la asignatura y el enfoque práctico que se le quiere dar, exigen que cada clase teórica involucre temas prácticos para cumplir con el objetivo curricular. El desarrollo de las clases teórico-prácticas aborda los conceptos centrales de cada tema, la utilización del concepto matemático y su aplicación a problemas relacionados con la especialidad.

Las clases prácticas se desarrollan, afianzando la utilización y aplicación de los conceptos presentados. Para ello se han organizado las actividades trabajando inicialmente, con ejercicios acerca de los métodos básicos expuestos en cada unidad; numerosos ejercicios que requieran que el alumno transfiera e interprete los distintos métodos de importancia práctica; una guía de trabajos prácticos para la organización y valoración de los temas

correspondientes, y, por último, actividades para que el estudiante profundice en extensiones de los conceptos que se desarrollan en la asignatura.

1.2.2 Análisis dado por la experiencia docente

La práctica docente en la mencionada asignatura, permite asegurar el siguiente diagnóstico respecto de la metodología utilizada en las clases teóricas y prácticas, las características de los estudiantes que en general provienen del interior de la provincia, la guía de trabajos prácticos y los tipos de evaluación.

La clase teóricas son de tipo magistral donde el docente desempeña un papel central, como los viejos catedráticos y en donde los estudiantes se limitan a tomar apuntes y a escuchar los razonamientos realizados por el docente manteniendo una actitud pasiva, en general, sin mencionar que no les es posible ver la relación o interrelación con asignaturas propias de la especialidad.

El estudiante tiene pocas probabilidades de adaptar, acomodar y asimilar los conocimientos impartidos por el docente y como consecuencia inmediata, el mismo no toma un papel activo que le favorezca a la construcción del aprendizaje. Esto lo lleva de alguna manera a frenar la creatividad y no estimular la motivación.

Esta particular enseñanza, que predomina en la mayoría de las aulas universitarias, se debe fundamentalmente al número de estudiantes con los que se trabaja, pero también al esfuerzo que representa generar cambios e implementar modalidades diferentes de trabajo.

La clase práctica, destinada para que ellos desarrollen los ejercicios y problemas de la guía de trabajos prácticos, se centra en que el estudiante resuelva los ejercicios propuestos; la colaboración del docente es constante con el fin de aprovechar este espacio para

complementar la clase teórica. Como es un primer año, se pretende que el estudiante se acostumbre al trabajo en forma lo más independiente posible.

Se detallan a continuación, algunas de las dificultades más relevantes que los alumnos manifestaron tener:

- Dificultades en la interpretación de consignas y situaciones problemáticas.
- Dificultades en la interpretación y aplicación de definiciones y propiedades.
- Problemas al razonar y pensar.
- Insuficiente habilidad, para el análisis y resolución de problemas.
- Poco interés en verificar los resultados obtenidos en los ejercicios, en analizar las respuestas obtenidas. Es decir, que en la mayoría de los casos los estudiantes resuelven ejercicios y problemas sin detenerse a reflexionar si la solución obtenida es coherente, si responde a lo pedido, si tiene sentido obtener dicho valor, como tampoco a revisar la tarea desarrollada. Esta situación evidenciaría las escasas habilidades de control y autocontrol que poseen.
- Los aprendizajes de los alumnos se caracterizan por el bajo nivel de integración de los conocimientos.

La guía de trabajos prácticos a disposición de los estudiantes contiene ejercicios y problemas, en su mayoría, extraídos de los libros habituales, que la cátedra ofrece, dichas actividades se disponen siguiendo el grado de dificultad de menor a mayor.

La evaluación que predomina es la sumativa, que consiste en evaluativos parciales cuya calificación acredita al estudiante para promocionar o bien regularizar la asignatura. Estos instrumentos son dos pruebas escritas de carácter práctico y que aprobadas con 7

(siete) o más, tiene la posibilidad de rendir la parte teórica concerniente a los temas del evaluativo parcial que hubiese aprobado con la nota mencionada.

Se pueden observar tres problemas:

- 1) Se redujo la carga horaria de la asignatura, lo que ocasionó un recorte en los contenidos matemáticos
- 2) Los estudiantes, en el proceso de aprendizaje realizan una simple repetición memorística de los conceptos enseñados. Y además, las asignaturas Álgebra y Análisis Matemático, se imparten en el mismo módulo lo cual le quita al estudiante la posibilidad de madurar conceptos necesarios para la asimilación.
- 3) El entorno socio-cultural en la Provincia de Santiago del Estero es un factor determinante en muchos aspectos pero más se nota en la educación universitaria y sobre todo en la de matemática y más aún en los estudiantes que ingresan a estudiar Ingeniería Agronómica.

La observación de la situación descripta tuvo como consecuencia la búsqueda de cambios para mejorar el aprendizaje de la Matemática y contribuir a desarrollar las capacidades que necesita el futuro ingeniero en su labor profesional. En particular, se decidió focalizar el cambio en la clase práctica, especialmente el material didáctico con el que los alumnos trabajan: la guía de trabajos prácticos.

Así, frente a la situación problemática enunciada, se pretende implementar un Sistema de Tarea para mejorar Calidad del Proceso de Aprendizaje del Análisis Matemático, tomando el tema Derivada y sus Aplicaciones para ejemplificar el mismo. Un especial énfasis en la resolución de problemas, porque en el presente trabajo se considera que, afianzando este tema, se intenta reforzará en el alumno la calidad de la asimilación de conocimientos.

1.3 Antecedentes de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.

Las investigaciones más importantes focalizadas en el aprendizaje y enseñanza del concepto de derivada, han sido, en orden de importancia: (*Azcárate*, 1990; *Azcárate*, 1996; *Font*, 2000; *Tall*, 1992; *Asiala*, 1996; *Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. & Schwingendorf, K.*, 1997; *Baker*, 2000 y *Clark*, 1997).

A partir de las lecturas de los autores ya mencionados, nos han permitido entender, visualizar y contrastar los aportes que han hecho los autores referenciados, de los cuáles se remarcarán los siguientes aspectos más importantes:

- **Selden y Mason** (1994), **Orton** (1983), entre varios autores, han documentado que incluso los estudiantes que pueden resolver exitosamente problemas rutinarios de cálculo tienen dificultades para resolver problemas no rutinarios. Algunos creen que estas dificultades son debidas a la débil visión conceptual que tienen del concepto función: además, que el aprendizaje ordinario y la reorganización del conocimiento algunas veces incorporan construcciones matemáticas incorrectas que se extienden durante un largo período de tiempo.
- Generalmente, se ha considerado que la habilidad de visualizar en matemática puede ser beneficiosa, pero **Aspinwall, Shaw y Presmeg** (1997) reportaron sobre un estudiante cuya habilidad para pensar sobre un problema estaba obstaculizada por una imagen incorrecta de la gráfica de un modelo prototipo. El estudiante había construido una imagen de una función polinómica de segundo grado teniendo asíntotas verticales. Sin embargo, paralelamente afirmaba que el dominio de la misma son todos los números reales. Esta imagen errónea le causaba problemas al tener que dibujar el gráfico de la función derivada como si fuera una función cúbica, puesto que, este dibujo de la función cuadrática entra en

conflicto con el conocimiento analítico que tiene el estudiante de la derivada de una función cuadrática que debería ser una línea recta. Además, se demostró que él, durante el proceso de la investigación, no puede controlar su imagen mental que continúa interfiriendo en su pensamiento sobre la función derivada.

- **Amit y Vinner (1990); Asiala (1997)**, reportaron que algunos estudiantes igualan la derivada con la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado. Esto también fue encontrado en algunos profesores considerados en nuestra investigación.

- **Ferrini-Mundy y Graham (1994)**, discutieron en detalle sobre el deseo que muestran algunos estudiantes por encontrar la ecuación para una función representada gráficamente antes de hallar el gráfico de su derivada. Este aspecto fue también detectado en el proceso de resolución de alguno de los profesores que participaron en este estudio a las situaciones planteadas.

- **Asiala (1997)**, en su estudio sobre la comprensión gráfica del concepto de derivada, reportaron que la mayoría de los estudiantes despliegan una comprensión razonable de la relación entre la pendiente de la tangente y la derivada en un punto. En efecto, en nuestra investigación también se constata esta conclusión.

- **Thompson (1994)**, reportó sobre un experimento de enseñanza donde involucró imágenes de razones de cambio y comprensión del teorema fundamental del cálculo. Los participantes de este estudio eran estudiantes universitarios en la facultad de matemáticas y graduados de la misma facultad. Este autor observó que los estudiantes tenían concepciones débiles de las razones de cambio, relativo al significado de la derivada, que llevaron dificultades en la comprensión de la integración. Su definición de imágenes, basadas sobre la internalización de Piaget de los objetos y las acciones hacia objetos, fue la base de su análisis de la comprensión de los estudiantes de la derivada y la integración, encontrando que

tenían dificultad en la conceptualización de la derivada como una función que ella misma denota una razón de cambio.

- La comprensión de las propiedades funcionales hacia el aprendizaje del cálculo también ha sido estudiado. En su artículo describiendo la visión de crecimiento orientado de la función como objeto, **Slavit** (1997) comentó que sus estudiantes no encuentran algunas propiedades funcionales, como por ejemplo, cúspide, hasta que alcanzan los cursos de cálculo que ellos diseñan. Para estos estudiantes la interiorización de las propiedades de la función es limitada por las clases de funciones que ellos han estudiado. Slavit en este artículo, llama la atención hacia una investigación futura sobre el rol de las funciones en los cursos de cálculo. También manifiesta que con mucha frecuencia los estudios que proponen funciones polinómicas y exponenciales, que son suaves y continuas, llevan a generalizaciones superiores sobre la continuidad.

- **Orton** (1983), observó que los estudiantes tienen representaciones adecuadas sobre la diferenciación en tareas rutinarias, pero en cambio, tuvieron intuiciones pequeñas o deficiente comprensión del concepto derivada. También reportó que las dificultades que tienen los estudiantes con la interpretación gráfica de la derivada puede ocurrir en el caso de la línea recta, y no sólo con curvas más complicadas, e igualmente, muchos estudiantes confundieron la derivada en un punto con la ordenada, es decir, con el valor de y (segunda coordenada) del punto de tangencia.

- **Eisenberg** (1992), citado en **Asiala** (1997), y **Vinner** (1989). El primero reportó que los estudiantes *evitan la visualización* y concluyó, al igual que **Vinner** (1989), que los alumnos exhiben una dependencia y necesidad por el uso de expresiones algebraicas (fórmulas) cuando tratan con el concepto de función (función derivada). Para ello, propuso 10 preguntas en un cuestionario, con respecto al tema, pero él no realizó en su estudio entrevistas a los estudiantes sobre el proceso de resolución, y solo se basó en el registro

escrito. Los resultados que se encontraron en esta investigación, coinciden con los reportados por los anteriores.

- **Tufte** (1989), citado en **Asiala** (1997), reportó los resultados de las representaciones de los estudiantes sobre un cuestionario de conceptos del cálculo. Una de las investigaciones con 200 estudiantes de primer año de la escuela universitaria y otra con 24 estudiantes de primer semestre de cálculo quienes habían completado un curso de cálculo tradicional para diseñar un programa sobre conceptos básicos de cálculo (por ejemplo: aproximación al límite, derivada, integrales definidas vía suma de Riemann), reportaron que los estudios sugieren que la experiencia de programar, la cual incluye el escribir en un lenguaje de ordenador códigos sobre conceptos básicos del cálculo, puede tener un efecto profundo sobre la comprensión conceptual de los estudiantes de dichos conceptos; esto comparándolo con estudiantes que han seguido un curso con clases tradicionales.

- **Asiala** (1997), también reportaron que los resultados encontrados por **Tufte** (1989) son paralelos con los resultados positivos que ellos encontraron. Señalan que el análisis que realizaron es un intento para promover la comprensión de la naturaleza de este efecto positivo, en términos de las construcciones mentales cuando se escriben programas. Resaltan que **Tufte** (op.cit.) no realizó entrevistas clínicas y sólo en la resolución por escrito de las situaciones del cuestionario.

1.4. – Importancia de la Resolución de Problemas

Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana y cataloga al hombre como "el animal que resuelve problemas". Siendo un matemático productivo, se preocupó por el mal desempeño de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente al resolver

problemas. Creía que era posible llevar al salón de clases su experiencia como matemático cuando se encontraba resolviendo problemas y, de esta manera, ayudar a los estudiantes. Santos (2007). Analizó los diálogos que regularmente realizaba consigo mismo, cuando se encontraba inmerso en el proceso de solución y sistematizó un método que puede ser útil a los estudiantes al resolver problemas.

Con él, pretendía dar las herramientas necesarias para incursionar, con sentido, en la realización de acciones y reflexiones que condujeran a los estudiantes a encontrar la solución. Propuso que el profesor apoye y oriente inicialmente a los estudiantes a desarrollar los procesos de resolución de problemas en los que intervienen la heurística y la reflexión, con la intención que después los estudiantes puedan seguir por sí mismos estos procesos.

Polya (op.cit.) distingue cuatro fases en la resolución de problemas: comprender el problema, diseñar un plan; ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Además, establece que existen dos tipos de problemas: *rutinarios* y *no rutinarios*. Los problemas *rutinarios* son aquellos que, teniendo interés en resolverlos, el que los enfrenta encuentra el camino de solución de manera casi inmediata, no requieren un esfuerzo mental extraordinario para visualizar el método, el trazo, el algoritmo o el lugar donde puede consultarse una idea para su solución. En cambio, los problemas *no rutinarios* requieren esfuerzo y meditación antes que se vislumbre alguna idea para la solución. Esta clasificación es relativa, pues para algún estudiante resolver un problema puede significar un esfuerzo demasiado grande, para otro puede ser menor el esfuerzo realizado, y puede significar un acto de simple recordatorio para un matemático talentoso o un estudiante con entrenamiento.

Las acciones físicas o mentales que contribuyen a encontrar pistas o ideas que ayudan a resolver los problemas fueron identificadas por Polya (ibíd.) como procesos heurísticos; algunas veces son trazos, toma de valores extremos, aplicación de resultados

conocidos, comparaciones, visualizaciones, descarte de posibilidades, etc., los cuales necesariamente se combinan con los procesos de reflexión (autorreflexión).

1.5.- Las Corrientes Psicopedagógicas

Para respaldar teóricamente el trabajo de tesis, el marco teórico conceptual de la investigación lo constituyen:

- El Enfoque Cognitivo representado por J. Piaget con su teoría Psicogenética y D. Ausubel con su teoría del Aprendizaje Significativo.
- El Enfoque Histórico Cultural de L .S. Vigotsky.

1.5.1.- El enfoque cognoscitivo de Piaget

Este enfoque supone que los objetivos de una secuencia de enseñanza, se hallan definidos por los contenidos que se aprenderán y por el nivel de aprendizaje que se pretende lograr. Por otra parte, las habilidades cognitivas a desarrollar siempre se encuentran en vinculación directa con un contenido específico.

En síntesis, son tres etapas en el proceso de enseñanza, la primera pretende preparar al estudiante a través de la búsqueda de saberes previos que podrían propiciar u obstaculizar el aprendizaje, la segunda, la de activar los conocimientos previos al presentar los contenidos y, finalmente, estimular la integración y la transferencia en virtud de la nueva información adquirida.

1.5.2 Aprendizaje significativo

Comprender y aprender implica una visión del aprendizaje basada en los procesos internos del alumno y no solo en sus respuestas externas. Con la intención de promover la

asimilación de los saberes, el profesor utiliza organizadores previos que favorezcan la creación de relaciones adecuadas entre los conocimientos previos y los nuevos. Los organizadores tienen la finalidad de facilitar la enseñanza receptivo significativa, con lo cual, sería posible considerar que la exposición organizada de los contenidos, propicia una mejor comprensión.

1.5.3 El funcionamiento de la inteligencia: Asimilación y Acomodación

En el modelo piagetiano, una de las ideas nucleares es el concepto de inteligencia como proceso de naturaleza biológica. Para él el ser humano es un organismo vivo que llega al mundo con una herencia biológica, que afecta a la inteligencia. Por una parte, las estructuras biológicas limitan aquello que podemos percibir, y por otra hacen posible el progreso intelectual.

Con influencia darwinista, Piaget elabora un modelo que constituye a su vez una de las partes más conocidas y controvertidas de su teoría. Piaget cree que los organismos humanos comparten dos "funciones invariantes": organización y adaptación. La mente humana, de acuerdo con Piaget, también opera en términos de estas dos funciones no cambiantes. Sus procesos psicológicos están muy organizados en sistemas coherentes y estos sistemas están preparados para adaptarse a los estímulos cambiantes del entorno. La función de adaptación de en los sistemas psicológicos y fisiológicos opera a través de dos procesos complementarios: la asimilación y la acomodación.

La asimilación se refiere al modo en que un organismo se enfrenta a un estímulo del entorno en términos de organización actual, mientras que la adaptación implica una modificación de la organización actual en respuesta a las demandas del medio. Mediante la asimilación la y la acomodación vamos reestructurando cognitivamente nuestro aprendizaje a lo largo del desarrollo (reestructuración cognitiva).

Asimilación y acomodación son dos procesos invariantes a través del desarrollo cognitivo. Para Piaget asimilación y acomodación interactúan mutuamente en un proceso de equilibración.

1.5.4 El concepto de Esquema

El concepto de esquema aparece en la obra de Piaget (1975) en relación con el tipo de organización cognitiva que, necesariamente implica la asimilación: los objetos externos son siempre asimilados a algo, a un esquema mental, a una estructura mental organizada.

Para Piaget, un esquema es una estructura mental determinada que puede ser transferida y generalizada. Un esquema puede producirse en muchos niveles distintos de abstracción. Uno de los primeros esquemas es el del objeto permanente, que permite al niño responder a objetos que no están presentes sensorialmente. Más tarde el niño consigue el esquema de una clase de objetos, lo que le permite agruparlos en clases y ver la relación que tienen los miembros de una clase con los de otras. En muchos aspectos, el esquema de Piaget se parece a la idea tradicional de concepto, salvo que se refiere a operaciones mentales y estructuras cognitivas en vez de referirse a clasificaciones perceptuales.

Una marcada particularidad de los alumnos, motivo de esta investigación es que, esos esquemas propuestos por Piaget, en la mayoría de la población estudiantil de la carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Santiago del Estero o no lo tienen o lo tienen confuso, razón por la cual que en el desarrollo de esta investigación se hace hincapié en la labor y desenvolvimiento del profesor de la asignatura y a la buena voluntad de los docentes de asignaturas posteriores, porque es necesario un esfuerzo considerable para lograr que los objetivos se plieguen a la motivación, para lograr, en el alumno una asimilación sustantiva.

1.5.5 El proceso de equilibración

Aunque asimilación y acomodación son funciones invariantes en el sentido de estar presentes a lo largo de todo el proceso evolutivo, la relación entre ellas es cambiante de modo que la evolución intelectual es la evolución de esta relación asimilación / acomodación.

Para Piaget el proceso de equilibración entre asimilación y acomodación se establece en tres niveles sucesivamente más complejos:

- i. El equilibrio se establece entre los esquemas del sujeto y los acontecimientos externos.
- ii. El equilibrio se establece entre los propios esquemas del sujeto
- iii. El equilibrio se traduce en una integración jerárquica de esquemas diferenciados.

Pero en el proceso de equilibración hay un nuevo concepto de suma importancia: ¿qué ocurre cuando el equilibrio establecido en cualquiera de esos tres niveles se rompe? Es decir, cuando entran en contradicción bien sean esquemas externos o esquemas entre sí. Se produciría un conflicto cognitivo que es cuando se rompe el equilibrio cognitivo. El organismo, en cuanto busca permanentemente el equilibrio busca respuestas, se plantea interrogantes, investiga, descubre, etc. hasta llega al conocimiento que le hace volver de nuevo al equilibrio cognitivo.

1.5.6 Implicaciones educativas de la teoría de Piaget

Piaget (1975) parte de que la enseñanza se produce "de adentro hacia afuera". Para él la educación tiene como finalidad favorecer el crecimiento intelectual, afectivo y social del niño, pero teniendo en cuenta que ese crecimiento es el resultado de unos procesos evolutivos naturales. La acción educativa, por tanto, ha de estructurarse de manera que favorezcan los procesos constructivos personales, mediante los cuales opera el crecimiento. Las actividades

de descubrimiento deben ser por tanto, prioritarias. Esto no implica que el niño tenga que aprender en solitario. Bien al contrario, una de las características básicas del modelo pedagógico piagetiano es, justamente, el modo en que resaltan las interacciones sociales horizontales.

Las implicaciones del pensamiento piagetiano en el aprendizaje inciden en la concepción constructivista del aprendizaje. Los principios generales del pensamiento piagetiano sobre el aprendizaje son:

- Los objetivos pedagógicos deben, además de estar centrados en el niño, partir de las actividades del alumno;
- Los contenidos, no se conciben como fines, sino como instrumentos al servicio del desarrollo evolutivo natural;
- El principio básico de la metodología piagetiana es la primacía del método de descubrimiento;
- El aprendizaje es un proceso constructivo interno;
- El aprendizaje depende del nivel de desarrollo del sujeto;
- El aprendizaje es un proceso de reorganización cognitiva;
- En el desarrollo del aprendizaje son importantes los conflictos cognitivos o contradicciones cognitivas;
- La interacción social favorece el aprendizaje;
- La experiencia física supone una toma de conciencia de la realidad que facilita la solución de problemas e impulsa el aprendizaje;
- Las experiencias de aprendizaje deben estructurarse de manera que se privilegie la cooperación, la colaboración y el intercambio de puntos de vista en la búsqueda conjunta del conocimiento (aprendizaje interactivo).

Como afirmó Piaget (1975), el aprendizaje está condicionado por el nivel de desarrollo cognitivo del alumno, pero a su vez, como observó Vigotsky (1989), el aprendizaje es un motor del desarrollo cognitivo. Por otra parte, muchas categorizaciones se basan en contenidos escolares resulta difícil separar desarrollo cognitivo de aprendizaje escolar. El punto central es pues, tomando el punto que afirma que la interacción social favorece el aprendizaje y que es un proceso constructivo interno, los educandos con los cuales se enfrentan año a año los docentes encargados, tienen un entorno socio cultural que no los favorece, y en este sentido debería plantearse como un conjunto de acciones dirigidas a favorecer tal proceso.

La estrategia que se ha desarrollado (desde un marco teórico constructivista) es la de generar un conflicto en el alumno entre su teoría intuitiva y la explicación científica a fin de favorecer una reorganización conceptual, la cual no será simple ni inmediata.

Finalmente otra implicancia importante de esta teoría es que ha resuelto la aparente incompatibilidad entre la enseñanza expositiva y la enseñanza por descubrimiento, porque ambas pueden favorecer una actitud participativa por parte del alumno, si cumplen con el requisito de activar saberes previos y motivar la asimilación significativa.

1.6- Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky

Aportes valiosos son los de la Escuela Histórico – Cultural que toma lo positivo de teorías anteriores y enriquece su obra con valiosas ideas. Esta constituye una meta teoría de gran trascendencia, que representada por L.S. Vigotsky, sus colaboradores y discípulos presenta un conjunto de ideas pedagógicas novedosas, que con gran actualidad y vigencia se encuentran intactas y ofrecen al psicólogo educativo y al pedagogo un campo de investigación de mucha utilidad que responde a los problemas de la escuela actual y a la

búsqueda de solución a los retos y problemas que ésta nos plantea. Vigotsky (1987), acuñó la idea de concebir la educación como proceso permanente que posibilita capacitar al hombre para la vida, cumple una función esencial en el crecimiento personal del sujeto. El proceso de formación y despliegue de lo humano pone una naturaleza social, interactiva y modificable, para resaltar la importancia de la educación como proceso inherente del ser humano.

La obra de Vigotsky (1968) ha sido interpretada desde múltiples aristas dentro de la psicología contemporánea. Algunos autores consideran a este autor como constructivista, al analizar de manera parcial sus ideas sobre el proceso de aprendizaje e incluso sus conceptos como Zona de Desarrollo Próximo han sido truncados para encontrar significación dentro de dicho enfoque.

El enfoque histórico-cultural sitúa ante la posibilidad de proponer la estimulación de estrategias de aprendizaje para el desarrollo interactivas, desarrolladoras, que permiten concebir la personalidad de manera integral, desde un enfoque de proceso y poniendo como centro la relación que se puede establecer entre la enseñanza y el desarrollo personal lógico.

"En la determinación histórico social de la personalidad que implica el carácter mediatizado de las funciones psíquicas superiores en el interjuego intersíquico – intrapsíquico, así como la relación aprendizaje y desarrollo a partir del concepto de zona de desarrollo próximo" Vigotsky. (1987)

Esta concepción convierte al alumno en el centro del proceso de aprendizaje y sitúa su capacidad de aprender en un lugar prioritario dentro del proceso educativo.

Se considera que este elemento supera los intentos que desde otras concepciones teórico-metodológicas tratan de ubicar el centro del proceso enseñanza-aprendizaje en otros elementos dentro de la didáctica pedagógica, además presenta una coherencia epistemológica al considerar el sujeto integral, contextualizado en su proceso y en constante intercambio con lo que le rodea.

El desarrollo sigue al aprendizaje puesto que este es quien crea el área de aprendizaje potencial. Esta constituye la ley de la genética y de la dinámica del desarrollo explicada por Vigotsky (1987). Se comparte la propuesta de este autor al relacionar el aprendizaje del sujeto y su desarrollo, siendo el aprendizaje la premisa del desarrollo, aunque ser determinante no significa que el sujeto sea un ente pasivo en su proceso de crecimiento y formación personológica. Las condiciones internas del sujeto – pasado, presente y futuro – estructurado en los contenidos psicológicos de manera prospectiva le brindan al sujeto un soporte donde el contexto actúa, reestructura, modifica y hace surgir nuevas formaciones psicológicas.

Los procesos de enseñanza y desarrollo son mediatos y mediatizados por el uso de signos e instrumentos, y por las interacciones del aprendiz consigo mismo y con otros significativos (familia, maestro y coaprendices) en su encuentro con el contenido (como expresión cultural) que debe internalizar.

Las Estrategias de Aprendizaje para el Desarrollo, se convierten en portadoras de instrumentos que doten al sujeto de nuevas oportunidades de control de su comportamiento y van creando principios de desarrollo en la propia actividad de aprendizaje, así como satisfacción en las demandas de la tarea docente a la cual el alumno se enfrenta.

Las interacciones sociales que median en la relación estudiante –contenido provocan premisas del desarrollo personológico, al considerar este como proceso y resultado, en última instancia de las relaciones sociales en las que se encuentra inmerso el sujeto concreto.

Se ha tomado en cuenta que esta propuesta coincide con los elementos abordados del enfoque histórico-cultural para ser concebida como instrumento ya que mediatiza la actividad de aprendizaje, el comportamiento posterior del sujeto y su desarrollo personológico. Es una manera de influir en la configuración psicológica del sujeto a partir del

otro significativo, en este caso maestro, familiar, coaprendiz, e internalizar este proceso interactivo de construcción del conocimiento con apoyo social.

Se valora dentro de la propuesta el concepto vigotskiano de Zona de Desarrollo Próximo en su total magnitud, superando así la parcialización cognitiva que propone el constructivismo. Se ha propuesto un abordaje de la relación alumno – profesor, alumno – alumno, y grupo como un todo enfatizando en las posibilidades del alumno de desempeñarse más allá de su desarrollo actual con la ayuda del otro significativo, dándole al profesor un rol distinto al de presentador y controlador de la estrategia sino que se parte de la necesidad sentida de desarrollar o introducir la estrategia y que sea él mismo, de conjunto con el estudiante quien la transfiera y guíe su práctica y la de sus coaprendices, considerando que la situación de aprendizaje puede darse desde áreas específicas o desde el carácter multidisciplinario, en una actividad docente o en la práctica profesional.

Otro aspecto a resaltar del modelo vigotskiano es que al centrarse en el sujeto, hace al proceso desde y para el alumno y el grupo que aprende. El interés principal es formar un hombre que no solo se desarrolle integralmente, sino que pueda ser transformador de su realidad. Tomado como punto de partida en nuestra propuesta, resulta esencial reconocer el papel del sujeto de aprendizaje siendo la categoría rectora del proceso. De lo que el sujeto conoce, lo que demanda, sus motivos y necesidades, sus sentidos se proyecta el proceso hacia el desarrollo de ese propio sujeto, del logro de una integración madura en el contexto actual y proyectado hacia el futuro, consolidando sus formaciones psicológicas superiores.

La ayuda pedagógica que estimula el uso de las Estrategias de Aprendizaje para el Desarrollo se basa en la idea vigotskiana de los niveles de ayuda, concebidos como apoyo brindado para la solución de la tarea y para brindar instrumentos psicológicos que al dominarlos el sujeto será capaz de realizar la tarea en cuestión y regular su comportamiento.

Vigotsky (1987) enfoca la ayuda como la forma en que el sujeto logrará realizar acciones que ahora solo puede realizar en cooperación con otros.

Cobra importancia desde esta perspectiva de análisis el contexto como elemento mediatizador del aprendizaje y el desarrollo. El contexto crea el medio idóneo donde el sujeto psicológico se desenvuelve, desarrollando en las interacciones y relacionándose con las oportunidades que recibe de este. Es, sin dudas, el espacio desarrollador del sujeto, portador de los recursos esenciales para que el grupo transforme su realidad psicosocial, siendo el espacio práctico de enriquecimiento del sujeto. El contexto le permite la búsqueda, el empleo de habilidades, las posibilidades de reflexión, la satisfacción de su motivación, el espacio de su desarrollo.

1.6.1 Teoría de la Actividad Humana

Para Vigotsky (1982), la actividad humana es el proceso que media la relación entre el ser humano (sujeto) y aquella parte de la realidad que será transformada por él (objeto de transformación). Dicha relación es dialéctica, el sujeto resulta también transformado, porque se originan cambios en su psiquis por medio de signos que, como el lenguaje, sirven de instrumentos.

La actividad psíquica (interna) y la práctica (externa) no son dos cosas diferentes, sino dos formas de un todo único: la actividad. La unidad entre ambas formas revela la indivisibilidad de la vida íntegra del hombre, que se manifiesta en dos formas, la material y la ideal.

La Teoría de la Actividad de **A.N. Leontiev** (1981) permite realizar un análisis integral de la actividad humana, delimitando la estructura de la misma, es decir, sus componentes principales y las relaciones funcionales que entre ellos se producen, así como

su desarrollo. La actividad se concibe como un sistema de acciones y operaciones que realiza el sujeto sobre el objeto, en interrelación con otros sujetos.

En cualquier actividad humana, el sujeto actúa sobre el objeto impulsado por sus motivos, por las necesidades, internas y externas, que surgen en él para alcanzar su objetivo: la representación que ha imaginado del producto a lograr.

Antes de la ejecución de la actividad en el plano práctico el sujeto elabora su base de orientación conformada por la imagen, el conocimiento previo sobre la propia actividad, sobre el objeto, los procedimientos y los medios que ha de emplear, las condiciones en que se debe realizar y el producto a lograr.

Para la realización de su actividad el sujeto utiliza determinados procedimientos, es decir, sistemas de acciones y operaciones que dependen del propio sujeto, de las características del objeto, de los medios de que disponga, y de las condiciones.

Los medios son los instrumentos materiales, informativos, lingüísticos y psicológicos que posee el sujeto y que emplea en la transformación del objeto.

Las condiciones son el conjunto de situaciones de naturaleza ambiental, psicológica y social en que se efectúa la actividad.

Los productos son los resultados logrados mediante la actividad. Se distinguen las transformaciones en el objeto, el sujeto, los medios, los procedimientos y las condiciones.

Los objetivos son la parte rectora de este sistema pues ellos relacionan entre sí a los componentes de la actividad y le dan a la misma una dirección determinada hacia el resultado final.

El progreso de la actividad humana puede ser descrito mediante los cuatro momentos principales en que transcurre la misma: orientación, ejecución, control y corrección.

La orientación del sujeto en la situación que enfrenta con relación al objeto, está basada en los esquemas referenciales de que dispone e incluye la planificación de las futuras acciones. La ejecución consiste en la realización práctica de las acciones. El control tiene dos vertientes: la regulación sistemática que se efectúa durante los dos primeros momentos de la actividad y la comprobación final de lo logrado durante la actividad, que se consuma contrastando el producto alcanzado con el objetivo de la actividad. La corrección es el momento correspondiente a la toma de decisiones que permita realizar nuevamente la actividad de una forma cualitativamente superior.

Esta representación de la actividad humana puede servir de modelo teórico para el análisis sistémico estructural y funcional de la actividad directiva del profesor. Es conveniente señalar que en la perspectiva psicopedagógica de L.S. Vigotsky (1987) y seguidores que asumimos en este trabajo, el aprendizaje es el producto de un proceso de enseñanza que tiene lugar en un contexto social determinado, por lo que el sujeto que aprende está en indisoluble unidad y en constante interacción y comunicación con el sujeto que enseña; en cuya relación pueden producirse entre ellos intercambios de papeles **González** (1994).

1.7 La Actividad del Profesor

El profesor, el sujeto que enseña, tiene a su cargo la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje, en tanto debe planificar, organizar, regular, controlar y corregir el aprendizaje del alumno y su propia actividad **Tristá** (1985). El profesor debe estar en constante interacción y comunicación con sus alumnos, con sus colegas y con el resto de la comunidad de la institución donde labora. Se debe concebir como una personalidad integra, relacionada con el contexto social en que se desempeña como tal.

Lo que diferencia al proceso de enseñanza aprendizaje de otros procesos, su peculiaridad, es que lo que se transforma no es un objeto material inanimado, sino un ser humano, una persona que se modifica a sí misma con la ayuda de otras personas más capaces, especialmente con la guía, orientación y mediación del profesor. Es por ello que el objeto de la actividad del profesor no es exactamente el alumno, sino la dirección de su aprendizaje; pero para que dicha dirección sea eficiente, el profesor debe concebir al alumno como una personalidad plena que con su ayuda construye y reconstruye sus conocimientos, habilidades, hábitos, afectos, actitudes, formas de comportamiento y sus valores, en constante interacción con el medio socio cultural donde se desenvuelve **González** (1996).

Los motivos que mueven al profesor a desarrollar su actividad pueden ser de diversa índole y son también de extraordinaria importancia. Cuando el profesor ama la labor que desempeña, siente la necesidad interna de elevar la efectividad del proceso de enseñanza aprendizaje, de motivar a sus alumnos por el aprendizaje de la materia que imparte y, al unísono, de contribuir al crecimiento personal de cada uno de ellos. Sin embargo, si los motivos son extrínsecos, ajenos a la esencia del proceso que dirige, con frecuencia el profesor limita su labor fundamentalmente a la simple transmisión de los contenidos de la materia, estableciendo el facilismo pedagógico. Las insuficiencias en la personalidad del estudiante en gran medida están condicionadas dicho facilismo pedagógico, que consiste en una disminución de las exigencias docentes, como la selección de tareas o ejercicios tipos que no requieren estrategias intelectuales complejas; dar al alumno facilidades adicionales excesivas para que apruebe las materias; la enseñanza que sólo persigue la reproducción de los contenidos por el alumno, que no le plantea situaciones que hagan necesaria su iniciativa y creatividad.

Los objetivos de la enseñanza deben estar en correspondencia con los objetivos de aprendizaje, es decir, con las finalidades que pretenden lograr los estudiantes; así como con la

demanda social. Los objetivos llegan a constituir verdaderamente el elemento rector del proceso de enseñanza aprendizaje, cuando tanto los alumnos como los profesores los asumen conscientemente como suyos.

La base de orientación del profesor comprende su preparación en los contenidos de la materia que imparte y en la teoría y la práctica pedagógica; su conocimiento psicopedagógico sobre las características generales del sujeto a la edad correspondiente a su grupo de alumnos; su conocimiento previo no estereotipado sobre las peculiaridades de dicho grupo y las características personales de cada uno de sus integrantes, especialmente acerca del nivel de desarrollo que poseen los alumnos al inicio del proceso. Todo lo anterior, así como la conciencia de los objetivos a lograr y de las condiciones ambientales, psicológicas y sociales en que tendrá lugar el proceso de enseñanza aprendizaje, le permitirán seleccionar los procedimientos, las tareas y los medios más apropiados para alcanzar la efectividad del proceso que dirige.

Los procedimientos de la enseñanza son los métodos, técnicas y estrategias pedagógicas que planifica, organiza e introduce el profesor en el proceso para propiciar el aprendizaje de sus alumnos, regularlo y corregirlo. Deben estar en correspondencia con los contenidos, la actividad del alumno, los medios disponibles, y las condiciones en que se verifica el aprendizaje. Aunque los procedimientos utilizados en el aprendizaje dependen de las características del alumno, estos generalmente asumen en la actividad docente que se desarrolla en el salón de clases los propuestos por el profesor.

Los medios pedagógicos son los recursos materiales, informativos, lingüísticos y psicológicos que emplea el profesor para facilitar una comunicación educativa eficaz con sus alumnos y, con ello, el proceso de interiorización de los contenidos de un plano social a un plano individual.

Los productos del proceso de enseñanza aprendizaje son las transformaciones logradas tanto en la personalidad del estudiante y en la actividad del profesor, como en el proceso mismo.

La actividad del profesor, como cualquier otra actividad humana, puede ser descrita a través de cuatro momentos fundamentales: orientación, ejecución, control y corrección.

La orientación del profesor para el futuro desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje comienza con la elaboración de la base orientadora de su actividad y de la actividad del alumno, que le permita planificar y organizar las acciones que ambos deberán ejecutar. Según la teoría de la dirección

Según la teoría de la dirección, la planificación consiste en la determinación de una situación ideal o deseada que orienta el trabajo de una institución, un colectivo o una persona en un período dado. En este sentido, la planificación del proceso de enseñanza aprendizaje debe contemplar la delimitación de los objetivos, la selección y estructuración de los contenidos, las tareas del estudiante, los recursos pedagógicos, los procedimientos necesarios y las formas de control para asegurar el cumplimiento de los objetivos.

La organización del proceso de enseñanza aprendizaje debe comprender la organización espacio temporal, la organización del trabajo y la organización de su dirección **Tristá** (1985). La primera se refiere a la partición del proceso en subprocesos, por ejemplo, la división de una asignatura en temas o unidades, y éstos en actividades docentes, considerando la carga horaria de cada uno de ellos y la elaboración de los horarios de clases. La segunda trata de la distribución más conveniente del trabajo de los alumnos y del establecimiento de las medidas para asegurar la eficaz interacción entre ellos; así como la creación de condiciones ambientales, psicológicas y sociales adecuadas para el buen desenvolvimiento

del proceso. La tercera consiste en la creación de la red de relaciones entre los profesores y, entre estos, y los estudiantes.

El momento de orientación en la actividad del profesor según la teoría de la actividad, momento para la planificación y organización de acuerdo con la teoría de la dirección, se corresponde con el primer momento del procedimiento básico de la gestión de la calidad total, la planeación, del denominado Ciclo de Deming o de mejoramiento continuo: Planear, hacer, verificar y actuar.

La planeación es entonces un momento imprescindible para el logro de una educación de calidad **Reyes** (1999). Planificar desde esta perspectiva, significa establecer qué debe hacerse durante el proceso de enseñanza aprendizaje, cómo debe éste desarrollarse, mediante qué acciones concretas y sus responsables, atendiendo a las metas y a la misión de la institución educativa, es decir, a las necesidades del alumno, de la familia del alumno, del proceso educativo que recibirá al alumno en un siguiente nivel escolar y de la sociedad en general.

Durante la ejecución, la tarea del profesor es la de llevar a cabo lo planificado y organizado en el momento de la orientación, de manera flexible y en acción mancomunada con sus alumnos. En este momento, su función principal es la regulación basada en el control sistemático del proceso en su totalidad, es decir, tanto del aprendizaje del alumno como de su propia actividad.

En la teoría de la dirección, la regulación es una fase necesaria debido a que los sistemas de dirección se encuentran bajo el efecto de dos tendencias contradictorias: la tendencia a la organización por la acción del sujeto de la dirección y la tendencia a la desorganización, condicionada principalmente por factores exteriores. Dados los constantes efectos perturbadores sobre el sistema, la misión del sujeto de la dirección (profesor) consiste en valerse de la regulación para asegurar la adaptación de las influencias externas, es decir, la

asimilación de éstas dentro del marco de la organización vigente. De esa manera, a través de la regulación se mantiene el funcionamiento normal del objeto de dirección (el alumno) en el sentido de cumplir con los objetivos establecidos.

El control final del proceso de enseñanza aprendizaje consiste en la comprobación de la calidad del aprendizaje lograda por el alumno, contrastando lo alcanzado con los objetivos que se perseguían, a la vez que se comprueba la acción educativa del profesor.

En la teoría de la dirección, controlar es comparar el comportamiento real con el previsto y realizar las acciones pertinentes para garantizar el logro de los objetivos. El control cumple dos importantes funciones: En primer lugar revela la efectividad del trabajo realizado durante la planificación, la organización y la regulación, con lo que permite corregir las decisiones erróneas, total o parcialmente, que se hayan tomado en este sentido y, en segundo lugar, posibilita responder a tiempo y con eficacia a las desviaciones sufridas en el cumplimiento de los objetivos.

Se denomina control interno al que ejerce el propio profesor sobre el proceso de enseñanza aprendizaje que lleva a cabo. En este caso el control se expresa como el control sobre el aprendizaje de los alumnos y como autocontrol del profesor sobre su propia actividad. El control externo es el que realizan agentes externos al profesor y debe contener todos aquellos aspectos que reflejan de una u otra forma, la efectividad del proceso de enseñanza aprendizaje. Tanto el control sistemático como el final deben servir de base para la evaluación.

La corrección final, es el momento de reflexión y de toma de decisiones sobre proceso de enseñanza aprendizaje que ha finalizado. En este momento el profesor adopta las acciones correctoras necesarias para eliminar los comportamientos indeseados y que han limitado el cumplimiento de los objetivos trazados.

Esta teoría de la actividad elaborada por **Leontiev** (1981) se complementa con la teoría de la asimilación de **Galperin** (1976), quien llevó al campo de la educación todas estas teorías.

1.8 Teoría de la Formación de las Acciones Mentales por Etapas

Es **Galperin** (1959) quien instrumenta pedagógicamente la teoría de **Vigotsky** (1987) a partir del desarrollo de la teoría de formación por etapas de las acciones mentales y los conceptos y resume:

La actividad objetiva concreta significa el requisito de interpretarlos como un proceso de solución de determinados problemas. El proceso de solución de problemas consiste en la transformación orientada del material inicial y tal transformación se consigue con la ayuda de determinadas acciones realizadas en la mente. De aquí que el problema psicológico consista en esclarecer de qué forma estos objetivos se transforman en nuestras propias acciones mentales y principalmente, de qué forma aparece un proceso psicológico nuevo, concreto.

Para **Galperin** (1959) esto lo responde la hipótesis de la formación escalonada de las acciones mentales. Su tesis fundamental se basa en que la actividad psíquica es el resultado del paso de las acciones materiales externas al plano de la reflexión, al plano de la percepción de las imágenes y los conceptos. Concibe el proceso de asimilación de los conocimientos como un proceso activo, en este se forman las habilidades y las capacidades. No se concibe de forma mecánica, sino como un proceso de producción de la actividad, de enriquecimiento y transformación de los conocimientos y habilidades previas del estudiante, incrementando sus capacidades reales y situándolo en mejores posibilidades para recibir nuevos conocimientos, este proceso se desarrolla en forma de actividad material a mental, permaneciendo inalterable el contenido objetual.

Para que el proceso de asimilación se lleve a cabo es necesario que el individuo realice un conjunto de acciones o actividades, estas siguen una lógica que parte de quien realiza la acción, por supuesto con carácter subjetivo ya que se trata de la individualidad que es el sujeto; por otra parte está encaminada o dirigida hacia algo específico que es el objeto hacia el que se dirige producto de un motivo u objetivo, la necesidad de llevarla a cabo; en el caso pedagógico; cuando el motivo y el objetivo coinciden hay aprendizaje **Galperin** (1976).

Para realizar estas acciones se necesitan un conjunto de micro acciones que le dan a la acción proceso continuo, las operaciones, y un componente esencial en la acción es la base orientadora de la acción (BOA) que va a desarrollar el individuo.

Según Galperin (Op. Cit.), la BOA implica una imagen de la acción a realizar y también el ámbito de las condiciones en las cuales va a realizarse.

La calidad de la acción formada se evalúa según el resultado, para ello deben conocerse sus características fundamentales como son: la forma, conciencia, independencia, generalización y solidez. Durante la ejecución de la acción en la etapa material o materializada debemos tener en cuenta el tratamiento de las tareas, métodos, medios, formas y control según las etapas del proceso de asimilación a partir de las características de la misma. Las tareas deben propiciar la ejercitación de las acciones y los conocimientos que queremos formar.

Para **Galperin** (2001) en la actividad del proceso de enseñanza-aprendizaje, las acciones mentales transitan por etapas para formar los conceptos, dichas etapas son:

a) Etapa motivacional

Esta es una etapa de gran importancia, aunque a veces no se la demos, a través de ella se pueden obtener muchos logros como aptitudes, intereses, propicia el interés ocupacional y cierta disposición para el contenido a conocer. El alumno no entra en ningún tipo de acción, aquí se prepara al alumno para asimilar los conocimientos. En esta etapa las

tareas deben crear una disposición favorable hacia el objeto. Los métodos deben ser polémicos, vinculados a tareas profesionales. Los medios a emplear pueden ser videos, demostraciones experimentales, etc, y las formas de enseñanza son las conferencias.

b) Etapas de la base orientadora de la acción (BOA)

Es el conocimiento de la acción y de las condiciones en que debe realizarse, es donde se le da al alumno el sistema necesario de conocimientos sobre el objeto de estudio, las condiciones necesarias a tener en cuenta, los modelos de las acciones a ejecutar y el orden en que deben ser ejecutadas dichas acciones. En esta etapa no hay ejecución de la acción por parte del estudiante, solo el conocimiento de la acción, por lo que es el momento previo a la ejecución de la misma. Se muestra al alumno el material que tiene que asimilar, profundiza en aquella acción que da solución al problema. Los métodos a emplear son el explicativos, polémico y de elaboración conjunta. Los medios pueden ser diversos: pizarra, diapositivas, retro.

Galperin (2001) establece ocho tipos de BOA, pero explicaremos las tres primeras por ser las de mayor empleo.

En el primer tipo el estudiante actúa por el método de ensayo y error, por lo que comete errores; por ser la BOA incompleta la formación conceptual transcurre lentamente, o sea, el alumno, al no recibir todos los conocimientos de la acción tiene que tratar de encontrarlos, pero él no sabe cómo debe buscar estos conocimientos que le faltan para ejecutar la acción, sigue por la vía de ensayos probando.

En el segundo tipo, al alumno se le ofrece un sistema completo de orientaciones. Él actúa como ejecutor, pero no sabe llegar a la ejecución por lo que no se considera tampoco productivo, la BOA es completa, concreta y pre-elaborada.

En el tercer tipo de BOA, es la que se ha empleado en este trabajo, se destaca la enseñanza planificada de las nuevas tareas, a partir de ciertos niveles de ayuda, después las otras pueden ser resueltas y pueden ser cumplidas de forma individual.

c) Etapla material o materializada.

A partir de la tercera etapa se inicia la ejecución de la acción en el plano material o materializado, donde el estudiante realiza la acción y el profesor tiene la posibilidad de controlar su ejecución así como incidir en su formación y en la corrección o ajuste del aprendizaje que se vaya logrando. Los alumnos tienen que resolver problemas apoyándose en esquemas externos, que para este caso trabajamos las tarjetas de estudio.

Una de las etapas más importantes en la formación de la acción es la etapa material o materializada. La acción en dicha etapa incluye a su vez el operar con objetos reales, con sus modelos y la utilización de las tarjetas de estudio, ellas constituyen en el proceso de enseñanza una variante de presentación de la acción en su forma materializada, garantizando la solución inmediata de las tareas y liberando al estudiante de tener que memorizar determinados contenidos y orientarlo en el trabajo que debe ejecutar en la solución de las primeras tareas.

d) Etapla verbal

A partir de este momento, en que ya el alumno domina el esquema de la acción y ha adquirido a su vez los conocimientos necesarios, existen las condiciones para pasar a la etapa de formación en el plano del lenguaje, donde los elementos de la acción deben estar representados en forma verbal (oral o escrita) por el estudiante.

Existe una codificación en forma de concepto de la acción material. Los métodos son grupales, por pareja, de discusión, para la solución creativa de problemas y problémicos. Los medios se reducen, así como las tarjetas de estudio. Las formas de docencia son las

clases prácticas, seminarios y laboratorios. El control es la auto evaluación, el alumno expresa todo verbalmente.

El establecimiento de esta teoría constituye aportes en el establecimiento de las características de la acción, las que deben tenerse en cuenta en su formación, pues son indicadores de su calidad. Como características fundamentales de la acción se señalan:

- La forma en que se realiza la acción: material o materializada, verbal o mental.
- Su grado de generalización, es decir las posibilidades de su aplicación a diferentes tipos de situaciones.
- . El grado de conciencia o reflexión es la capacidad del sujeto de poder explicar lo que ha hecho y porque lo ha hecho.
- Su grado de independencia, es decir los niveles de ayuda que requiere el sujeto hasta lograr una acción independiente.
- La solidez o grado de permanencia de la acción en el tiempo.

e) Etapas mental

Las tareas son sin niveles de ayuda, sin formas de materialización y con carácter creador. Los métodos son de trabajo independiente. Las formas de enseñanza a partir de trabajos independientes con resultados, en clases y extra-clases. En esta etapa el lenguaje es interno, procesado con su respectiva estrategia discursiva, ya el alumno ha interiorizado los contenidos, los ha asimilado y es capaz de transmitirlos estableciendo correctamente la noesis y con sus valoraciones de posibles aplicaciones a nuevos fenómenos, por lo que existe una independencia absoluta. Es por lo que se puede afirmar como dice la Talízina (1987), el concepto sólo puede formarse cuando el individuo ya conoce los objetos que forman parte de dicho concepto.

A modo de síntesis de lo expuesto anteriormente se realizó el Tabla N° 1 que muestra los aspectos que se deben tener en cuenta en la organización de los Procesos de Aprendizaje y de Asimilación.

Tabla N° 1: Aspectos fundamentales a tener en cuenta en la organización de los procesos de Aprendizaje y de Asimilación.

ORGANIZACIÓN DEL PROCESO DE APRENDIZAJE	ORGANIZACIÓN DEL PROCESO DE ASIMILACIÓN		
Actividad	Etapas por la que transcurre la acción en la formación de la actividad interna	Significación	Indicadores cualitativos de la acción
Motivación	Motivación	El prof. plantea: Conflictos, Situaciones problemáticas, etc.	
Orientación	Creación de la B.O.A.	El Prof. Realiza: Esquemas orientadores, Plan de acción, etc.	
Ejecución	Materializada	El prof, el alumno o ambos realizan: Tarjetas de estudio, Esquemas orientadores, etc. El alumno puede: Recuperar información, Conectar información.	Generalización: El alumno es capaz de realizar ejercicios de distintos tipos.
	Verbal o de comunicación (aquí, surgen las abstracciones)	El alumno hace la tarea sin el apoyo de las tarjetas. Puede: justificar, fundamentar	Reflexión: Es capaz de fundamentar lo que hace y por qué lo hace.
	Mental	El estudiante tiene idealizado todo lo que ya logró en las etapas anteriores.	Independencia: El estudiante realiza la tarea sin ninguna ayuda.
Control		Regulación de las acciones, control por operaciones, control según resultado final.	

Cabe aclarar que el control debe estar presente en todos los momentos del proceso de aprendizaje y no solo al final.

Es muy importante que el docente sea capaz de elaborar las tareas de forma tal que sus contenidos estén estrechamente relacionados con el objeto de asimilación y respondan a las cualidades de la acción que se debe formar.

Por otra parte el método a través del cual el docente lleva al estudiante a la ejecución de la tarea es fundamental, en el sentido de que pueda propiciar no solo la ejecución de la misma sino también la posibilidad de controlar el proceso y el desarrollo del autocontrol en los estudiantes, proporcionándoles los indicadores adecuados.

Ya que la oportuna corrección en las operaciones que realice el alumno influye directamente en el tránsito efectivo por los restantes momentos o etapas del proceso, sin llegar al final de la tarea con errores que puedan haberse corregido en el propio proceso de formación.

Por otra parte, el lenguaje oral o escrito permite que el estudiante se exprese acerca de la acción que realiza, qué hizo y cómo lo hizo para lograr las abstracciones.

En conclusión, se considera que para Piaget el mecanismo básico de adquisición de conocimientos consiste en un proceso constructivo en el que las nuevas informaciones se incorporan a los esquemas o estructuras preexistentes en la mente de las personas, que se modifican y reorganizan según un mecanismo de asimilación y acomodación facilitado por la actividad del alumno Pozo (2006).

Unos de los aspectos a resaltar del modelo vigotskiano es que se centra en el sujeto y al centrarse en la persona, hace al proceso desde y para el alumno y el grupo que aprende. El interés principal es formar un hombre que no solo se desarrolle integralmente, sino que pueda ser transformador de su realidad. Tomado como punto de partida en nuestra propuesta,

resulta esencial reconocer el papel del sujeto de aprendizaje siendo la categoría rectora del proceso. De lo que el sujeto conoce, lo que demanda, sus motivos y necesidades, sus sentidos se proyecta el proceso hacia el desarrollo de ese propio sujeto, del logro de una integración madura en el contexto actual y proyectado hacia el futuro, consolidando sus formaciones psicológicas superiores.

Por su parte, Ausubel con la teoría del aprendizaje significativo dice que comprender y aprender implica una visión del aprendizaje basada en los procesos internos del alumno y no solo en sus respuestas externas.

En síntesis, supone poner de relieve el proceso de construcción de significados como elemento central de la enseñanza. Entre las condiciones para que se produzca el aprendizaje significativo, debe destacarse: **Significatividad lógica**: se refiere a la estructura interna del contenido. **Significatividad psicológica**: se refiere a que puedan establecerse relaciones no arbitrarias entre los conocimientos previos y los nuevos. Es relativo al individuo que aprende y depende de sus representaciones anteriores y **Motivación**: debe existir además una disposición subjetiva para el aprendizaje en el estudiante. Existen tres tipos de necesidades: poder, afiliación y logro. La intensidad de cada una de ellas, varía de acuerdo a las personas y genera diversos estados motivacionales que deben ser tenidos en cuenta.

CAPÍTULO II

Diseño de la Investigación

2.- Introducción

Es importante que los docentes trabajen para generar cambios no sólo en los contenidos de la materia, sino también en la manera de abordarlos. Buscando acompañar a los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje para no contribuir directa o indirectamente su autoexclusión. Se deben realizar esfuerzos para responder a las necesidades de los alumnos, modificando sistemáticamente el contenido, el proceso y el producto basándose en las aptitudes de ellos para trabajar cada tema, material o habilidad particular.

Los cambios que se introduzcan, deben ser en función de los intereses personales y los perfiles de aprendizaje y por eso es necesario recurrir a un conjunto de estrategias docentes y organizativas que eviten la desconexión entre los conceptos teóricos y la práctica.

El estudio actual de la Matemática se caracteriza por:

- Las posibilidades de utilizar Modelos Matemáticos más precisos, debido al desarrollo de los medios computarizados.
- El enfoque globalizado del objeto de estudio de las ciencias, como consecuencia de la necesidad de considerar los problemas complejos de la carrera con enfoque integrador. Estos factores son los que han influido para realzar las diferentes ramas de la ciencia y la técnica y elaborar Modelos Matemáticos que permitan el estudio de sus diferentes objetos.

En lo referido al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática para la carrera de Agronomía, es necesario lograr que la ejecución del proceso docente educativo se corresponda con la lógica del profesional que se quiere formar.

Esto se logra si el proceso se ejecuta en una estrecha relación con la realidad, donde no se debe atiborrar al estudiante con fórmulas y teorías matemáticas, ni se resuelven

un gran número de problemas relacionados con la matemática pura, sino que se enseña a aprender mediante la resolución de problemas propios de los agrosistemas con alternativas de solución.

Para lograr la formación de Ingenieros Agrónomos capaces de desplegar su actividad en la producción moderna, se hace necesario organizar la preparación ininterrumpida de los estudiantes en el campo de la Matemática, específicamente en la Modelación Matemática.

Esto requiere la elevación sistemática de los conocimientos matemáticos y del nivel científico del trabajo profesional, el cual no está exento en la esfera agrícola del desarrollo alcanzado mundialmente. La aplicación de técnicas de simulación a problemas biotecnológicos, de riego y drenaje, entre otros, así lo confirman.

Por ello, este trabajo de investigación pretende diseñar e implementar un Sistema de Tareas, que no sólo se apoye en las teorías psicológicas del aprendizaje sino también en el uso de Modelos Matemáticos interdisciplinarios que contribuyan a asegurar el éxito del aprendizaje.

Para lograr los propósitos enunciados es imprescindible que la enseñanza de la matemática se realice desde una perspectiva constructivista donde, la gestión del docente en la clase, es esencial, pues es quien debe elegir las situaciones significativas y funcionales, armar el plan de clase, anticipar los posibles procedimientos de los estudiantes, determinar la forma de agrupamiento, organizar los momentos de trabajo individual o grupal, la confrontación y debate y la institucionalización.

En la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad de Santiago del Estero (U.N.S.E.), la asignatura Análisis Matemático se imparte para los alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería Agronómica. Esta carrera, tiene como objetivo formar profesionales con sólidos conocimientos científicos y tecnológicos que permiten intervenir en

las cadenas productivas de base agropecuaria, en la actividad académica, en el medio ambiente y en la preservación de los recursos naturales desde una visión integral y sustentable.

Se aspira a que los estudiantes profundicen la práctica agronómica y apliquen los conocimientos de las diferentes asignaturas en forma integrada a determinadas situaciones o realidades de los agro ecosistemas en los que ejercerán su acción profesional futura; tratando que el Campo Experimental sea el escenario didáctico ideal para los alumnos que cursan la carrera donde se realizan las principales actividades productivas de la región.

Sin embargo, la Facultad de Agronomía y Agroindustrias recibe anualmente ingresantes a primer año con una formación heterogénea, producto de las diferentes Instituciones Educativas, cuyos planes de estudio varían de acuerdo a las diferentes modalidades y de planes de estudio adaptados a esas modalidades. Este factor suele originar dificultades que se manifiestan en un retraso en los estudios, en altos niveles de deserción y en una larga permanencia de los alumnos en la facultad.

Cabe aclarar, que la asignatura Análisis Matemático se dicta junto a las materias Algebra y Geometría Analítica, Botánica General e Introducción a la Agronomía y sus correlativas posteriores son Física y Topografía Agrícola. La misma posee una matrícula anual de alrededor de 100 estudiantes, con una carga horaria semanal de 5 horas, distribuidas en 2 horas teóricas y de 3 horas de práctica. La cátedra consta de un Profesor adjunto, de un Jefe de Trabajos Prácticos y de dos ayudantes estudiantiles.

Desde hace unos años, es una preocupación constante el problema en el alto nivel de deserción y bajo rendimiento de los alumnos ingresantes a la carrera de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias y en particular, en la cátedra de Análisis Matemático de la mencionada carrera, que junto a la Física son asignaturas en donde los alumnos sufren a tal punto de abandonar la carrera.

Algunos de los factores que influirían en esta problemática, que detectamos a lo largo de nuestra experiencia son: el desarraigo, la falta de motivación, la falta de información acerca de la carrera, etc., según lo expresado en el capítulo anterior.

Entre éstos factores, la falta de motivación y de articulación entre las asignaturas de diferentes disciplinas y de estructuras lógicas necesaria para el ordenamiento de los contenidos, tres aspectos que pueden ser modificados desde la labor del docente.

Por lo expuesto, resulta de interés investigar el diseño y la aplicación de un Sistema de Tareas que contenga Modelos Matemáticos que integren contenidos del Análisis Matemático, en especial la Derivada y haciendo énfasis en la Aplicación de la misma en algunas materias de la especialidad.

Cabe aclarar, que el modelo que este proyecto propone, está centrado en la asignatura Análisis Matemático para las carreras de Ingeniería Agronómica en el tema Derivada y sus Aplicaciones, pero que podrá extenderse a la totalidad del contenido del programa de la asignatura.

2.1.- Diseño Teórico

A partir de la descripción del Marco Contextual y de la Fundamentación Teórica, se propone con gran interés reorientar el rumbo tradicional de trabajo en las clases de Análisis Matemático. Para ello, se propone un diseñar un Sistema de Tareas que contenga ejercicios y problemas interdisciplinarios. Por consiguiente el problema planteado en esta investigación, fue el siguiente:

2.1.2 Problema a investigar

¿Puede la incorporación de un Sistema de Tareas basado en las Teorías Psicológicas del Aprendizaje y en el uso de Modelos Matemáticos en donde las Aplicaciones de la Derivada se articulan con algunas asignaturas de la especialidad mejorar la Calidad

del Proceso de Aprendizaje en los alumnos de la asignatura Análisis Matemático de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la U.N.S.E.?

El problema planteado es:

- Objetivo, ya que proporcionaría una solución a un problema cotidiano en el proceso de enseñanza – aprendizaje.
- Específico, ya que está acotado a las dificultades de los alumnos en el tema motivo de esta investigación.
- Contrastable empíricamente, puesto que las dificultades que presentan los alumnos desde el punto de vista teórico y práctico son detectables y medibles.

2.1.3 Hipótesis

En esta investigación se planteó la siguiente hipótesis de trabajo:

La incorporación de un Sistema de Tareas basado en las teorías psicológicas del aprendizaje y en el uso de Modelos Matemáticos, en donde las Aplicaciones de la Derivada se articulan con algunas asignaturas de la especialidad, mejorará la Calidad del Proceso de Aprendizaje en los alumnos de la asignatura Análisis Matemático de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de U.N.S.E.

El modelo que en ésta tesis se propone, consiste en un Sistema de Tareas, que, a modo de ejemplo, se lo ejercite en práctica en el tema Derivada y sus Aplicaciones, para

controlar el efecto que produce en el proceso de aprendizaje, pero que podrá extenderse a la totalidad del contenido del programa de la asignatura.

Para ello se plantean los siguientes Objetivos:

2.1.4 Objetivo General:

Diseñar y validar científicamente un Sistema de Tareas para la asignatura Análisis Matemático de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE, basado en las Teorías Psicológicas de Aprendizaje y en el uso de Modelos Matemáticos que se articulen con algunas asignaturas de la especialidad para mejorar la Calidad del Proceso de Aprendizaje de los estudiantes.

2.1.5 Objetivos Específicos:

- Seleccionar los temas de algunas de las asignaturas específicas de la carrera y los Modelos Matemáticos que puedan utilizarse en la de Análisis Matemático de la carrera de Ingeniería Agronómica.
- Seleccionar estrategias adecuadas para el diseño y elaboración del Sistema de Tareas que contenga los temas seleccionados, teniendo en cuenta las nuevas corrientes pedagógicas.
- Implementar el Sistema de Tareas en el curso de Análisis Matemático y determinar su influencia en la Calidad del Proceso de Aprendizaje.

El objeto de la investigación: el proceso de Enseñanza – Aprendizaje del Análisis Matemático.

El campo de acción del proyecto de investigación es el Sistema de Tareas.

2.1.6 Aportes de la Investigación

La novedad científica del trabajo de tesis se manifiesta en el tratamiento dado a la enseñanza del Análisis Matemático que consiste, fundamentalmente en la elaboración de un Sistema de Tareas basado en el uso de Modelos Matemáticos que integren contenidos de algunas asignaturas específicas de la carrera, además de tener en cuenta las teorías cognitivas del aprendizaje y el entorno socio cultural del alumno. La utilización de un nuevo material en la ejercitación del alumno, y la intervención desinteresada de distintos profesores de las asignaturas posteriores al Análisis Matemático, hace que nuestra investigación en la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE sea la primera que incursiona en esta temática.

La misma tiene **significación teórica**, puesto que:

- Servirá de base teórica para extender la investigación a toda la Disciplina Matemática de las Facultades de Agronomía.
- El enfoque sistémico empleado tiene en cuenta la interdisciplinariedad y el perfil del egresado.
- La caracterización del Sistema de Tareas diseñado, está en correspondencia con los principios de los enfoques teóricos que fundamentan el trabajo.

La significación práctica viene dada por lo siguiente:

- Es posible que la instrumentación del Sistema de Tareas propuesto constituya un valioso aporte para las otras Facultades de Agronomía del país o fuera de él.
- Los aportes teóricos que surjan de este trabajo podrían ser utilizados para el perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en otras carreras que se sirvan de la misma.

En consecuencia con lo expresado anteriormente las variables son:

Variable Independiente (VI): **Sistema de Tareas** y

Variable Dependiente (VD): **Calidad del Proceso de Aprendizaje**

2.1.7 Definición de conceptual de las variables:

Sistema de Tareas (VI): Un Sistema de Tareas es el conjunto de ejercicios, problemas y situaciones que propician la realización de acciones que queremos formar, o sea, aquellas que se corresponden con los objetivos y con el objeto de asimilación.

El Sistema de Tareas propuesto en éste trabajo estará dirigido a las acciones en el aula. En su diseño se tendrán en cuenta los siguientes aspectos: los objetivos de la tarea, el sistema de conocimientos y habilidades que se requieren formar, los tipos de ejercicios adecuados a las etapas o momentos del proceso de asimilación y las características de la acción, Modelos Matemáticos con las Aplicaciones de la Derivada, especialmente que tengan en cuenta la interdisciplinariedad con algunas asignaturas de la especialidad y los indicadores de control.

El Sistema de Tareas a realizar, exigirá la participación activa del estudiante y estará dirigida hacia la búsqueda y solución de problemas que interesan al futuro profesional. En cuanto a la organización de los contenidos, los ejercicios y problemas estarán dispuestos en forma gradual, desde los que poseen menor grado de dificultad hasta los de alto grado de dificultad. Esto nos habla de los niveles de asimilación: familiarización, reproducción, producción y creación.

Calidad del Proceso de Aprendizaje (VD): Se interpreta como la medida en que cada acción desarrollada conduzca a un alto grado de interiorización de los contenidos,

mediante la transformación de las características primarias de dichas acciones, es decir, que transiten:

- Desde la forma externa (o material) a la forma interna (o mental).
- De la acción no generalizada a la generalizada razonada.
- De la acción desplegada o muy desarrollada a la abreviada.
- De la acción dependiente (con ayuda) a la acción independiente (sin ayuda).
- De la acción consciente a la automatizada y creadora.

Estos son los cambios necesarios para que se produzca la interiorización del conocimiento y que provocan además un cambio en las características o cualidades de la acción. A su vez, estas características son indicadores que permiten evaluar la calidad de la acción formada y en consecuencia aportan criterios para la valoración de la calidad del aprendizaje de los estudiantes.

En este trabajo se consideraron las siguientes características o indicadores de la variable Calidad del Proceso de Aprendizaje:

- **Grado de Conciencia o Reflexión:** Determinado por la posibilidad de fundamentar los pasos seguidos en la resolución de los ejercicios.
- **Grado de Independencia:** Está determinada por los niveles de ayuda que requieren los estudiantes en la ejecución de las tareas propuestas.

A continuación se muestra en la Tabla N°2, la definición operacional de la variable dependiente: Calidad del proceso de Aprendizaje.

Definición operacional de la variable dependiente: Calidad del Proceso de Aprendizaje.

Tabla N°2: Operacionalización de la variable dependiente Calidad del Proceso de Asimilación

Dimensión	Medida e Indicadores
Grado de Conciencia o Reflexión	Muy Alto: Si el alumno es capaz de fundamentar entre el 80% y el 100% de los ejercicios (incluido el 80% y el 100%). Alto: Si es capaz de fundamentar entre el 60% el 80% de los ejercicios (incluido el 60%). Medio: Cuando el alumno es capaz de fundamentar entre el 40% y el 60% de los ejercicios (incluido el 40%). Bajo: Cuando es capaz de fundamentar entre el 20% y el 40% de los ejercicios (incluido el 20%). Muy Bajo: cuando el alumnos es capaz de fundamentar menos del 20% de los ejercicios.
Grado de Independencia	Muy Alto: Si resuelve adecuadamente y sin ayuda entre el 80% y el 100% de los ejercicios (incluido el 80% y el 100%). Alto: Si resuelve adecuadamente y sin ayuda entre el 60% el 80% de los ejercicios (incluido el 60%). Medio: Cuando sin ayuda, resuelve adecuadamente entre el 40% y el 60% de los ejercicios (incluido el 40%). Bajo: Cuando sin ayuda, resuelve adecuadamente entre el 20% y el 40% de los ejercicios (incluido el 20%). Muy Bajo: Cuando resuelve adecuadamente y sin ayuda menos del 20% de los ejercicios.

Fuente: Elaboración propia

2.2. Diseño Metodológico

La población considerada en la investigación son los 79 alumnos que cursaron la asignatura Análisis Matemático perteneciente al primer año de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la U.N.S.E. en el periodo lectivo 2015.

En la investigación educativa no existe un método absolutamente seguro para eliminar el error en la elaboración y validación de la teorías científicas, sino que tal procedimiento es relativo al momento histórico – cultural. Por esto, es necesario recurrir a los siguientes paradigmas.

En la ciencia, un **Paradigma** es un conjunto de realizaciones científicas "*universalmente*" reconocidas, que durante un tiempo proporcionan modelos de problema y soluciones a una comunidad científica. Los paradigmas contienen reglas y regulaciones que hace:

- a. Establecer o definir fronteras.
- b. Dicen cómo comportarse dentro de esas fronteras

El paradigma actúa como un ejemplo – modelo aceptado que incluye leyes, teorías, aplicaciones e instrumentaciones de una realidad.

Existen tres paradigmas que se utilizan para realizar este tipo de investigación, de rápida aplicación a las ciencias sociales, estos son:

- **Paradigma Positivista o Empírico:** Se le ha denominado Cuantitativo, empírico-analítico racionalista. Surge de las ciencias naturales, se extrapola a las ciencias sociales. Una de las pretensiones de este paradigma es sostener que las predicciones son una explicación del hecho. Sus características fundamentales son: Su orientación es “prediccionista” pues planteada la hipótesis, es decir, predecir que algo va a suceder, luego

comprueba o verifica que así sucedió. Que intenta explicar y, sobre todo, predecir los acontecimientos a partir de relaciones entre la causa y el efecto.

- **Paradigma Interpretativo:** Con este paradigma podemos comprender la realidad como dinámica y diversa, se lo denomina cualitativo, fenomenológico-naturalista o humanista. Su interés va dirigido al significado de las acciones humanas y de la práctica social. Su propósito es hacer una negación de las nociones científicas de explicación, predicción y control del paradigma positivista, por las nociones de comprensión, significación y acción. Su orientación es al “descubrimiento”. Busca la interconexión de los elementos que pueden estar influyendo en algo que resulte de determinada manera. La relación investigador-objeto de estudio es concomitante. Existe una participación democrática y comunicativa entre el investigador y los sujetos investigados. Considera a la entrevista, observación sistemática y estudios de caso, como el método modelo de producción de conocimiento. Su lógica es el conocimiento que permita al investigador entender lo que está pasando con su objeto de estudio, a partir de la interpretación ilustrada. En la relación teoría-práctica existe desproporcionalidad. Predomina la práctica y por ende no es lo fundamental el establecimiento de generalizaciones o leyes ni la ampliación del conocimiento teórico. Aspira al descubrimiento y comprensión de los fenómenos en condiciones naturales. Su objetivo es penetrar en el mundo personal de los estudiantes (cómo interpretar las situaciones, que significan para ellos, que intenciones, creencias, motivaciones les guían). Entre la investigación y la acción existe una interacción permanente. La acción es fuente de conocimiento y la investigación se constituye en sí una acción transformadora. Se puede emplear en pequeños grupos.

- **Paradigma Sociocrítico:** En este paradigma la tarea del investigador se traslada, desde el análisis de las transformaciones sociales hasta el ofrecimiento de respuestas a los problemas derivados de estos. Los parámetros esenciales de este paradigma son los

siguientes: Su orientación está dirigida a la “aplicación”. Se encamina al análisis de las transformaciones sociales y básicamente a la implicación de los investigadores en la solución de problemas a partir de la autorreflexión. La relación investigador-objeto de estudio es de correspondencia. La investigación, desde ésta perspectiva, tiene un carácter auto reflexivo, emancipativa y transformadora para ambos. Sin embargo, este paradigma introduce la ideología de forma explícita. El método modelo de conocimiento, es la observación participante. Implica que los sujetos de investigación, así como el investigador, están en constante reflexión / autorreflexión para la solución de sus problemas. En la relación teoría-práctica existe desproporcionalidad. Predomina la práctica y por ende no es lo fundamental el establecimiento de generalizaciones o leyes ni la ampliación del conocimiento teórico. Aspira a la utilización del conocimiento para liberar al hombre. Su propósito es ofrecer respuestas a los problemas y por ende mejorar o cambiar las prácticas cotidianas. Se pone al servicio del grupo o categoría social más desfavorecida. Reivindica el desarrollo de un conocimiento “Sociocrítico”. Sus principios ideológicos apuntan a la transformación de las relaciones sociales. Está centrada sobre las diferencias. Entre la investigación y la acción existe una interacción permanente. La acción es fuente de conocimiento y la investigación se constituye en sí una acción transformadora. Esta acción transformadora parte de conocimientos, acciones y valores reales, que surgen de la vida social y se pretende satisfacer lo prioritario.

2.2.1 Los Paradigmas en esta Investigación

La tendencia actual es realizar un trabajo de investigación que contemple los aportes positivos de los diferentes enfoques analizados, ya que la investigación educativa es interdisciplinaria, con todo el contexto social de naturaleza compleja y que requiere de la integridad de los aportes.

Algunos de los aspectos del Paradigma Positivista se reflejan en esta investigación en cómo se dimensionó la variable dependiente “**Calidad del Proceso de Aprendizaje**”, donde se analizaron indicadores y medidas, empleando interpretaciones y explicaciones del fenómeno cuantitativamente.

El Paradigma Interpretativo se asume al reconocer al investigador como participante del proceso de investigación, considerando los sujetos contextualizados en un marco social y etnográfico atendiendo interpretaciones de métodos cualitativos.

En ésta investigación se enfatizan los postulados del Paradigma Crítico, ya que es una investigación para la educación, donde se expresa la ideología en que se sustenta; los alumnos participantes de la acción están involucrados y comprometidos con la transformación. Se utilizan estrategias de planificación de la acción, llevada a la práctica y sometida a la observación.

2.2.2 Investigación cuantitativa y cualitativa

La Investigación Cuantitativa puede ubicarse en el paradigma positivista, interpretativo o Socio crítico. Está fundamentada en el Cientificismo y el Racionalismo como posturas Epistemológicas Institucionalistas. Posee un profundo apego a la tradición de la Ciencia y utilización de la neutralidad valorativa como criterio de objetividad, por lo que el conocimiento está fundamentado en los hechos, prestando poca atención a la subjetividad de los individuos. Su representación de la realidad es parcial y atomizada. **Hurtado y Toro** (1998). Dicen que la investigación Cuantitativa “tiene una concepción lineal, es decir que hay claridad entre los elementos que conforman el problema, ya que son definidos, tienen límites y se sabe con exactitud donde se inicia”.

La Investigación Cualitativa: Es de tipo inductivo, tiene una perspectiva holística, esto es que considera el fenómeno como un todo y cada parte de ese todo es incapaz de

explicar el fenómeno. Se utiliza en estudios a pequeña escala. Hace énfasis en la validez de las investigaciones a través de la proximidad a la realidad empírica que brinda esta metodología. Establece hipótesis para explicar los fenómenos de estudio, los cuales no suelen ser susceptibles de medición. Es de naturaleza flexible, evolucionaria y recursiva. Los investigadores cualitativos participan en la investigación a través de la interacción con los sujetos que estudian, es el instrumento de medida, así que analizan y comprenden a los sujetos y fenómenos desde una perspectiva que aparta sus prejuicios y creencias.

Se ha contemplado, que tanto la investigación cuantitativa como la cualitativa fortalecen el trabajo que se realiza por dilucidar las mejores opciones para obtener una respuesta en la solución de los problemas educativos. La decisión, por tomar una u otra línea, tendrá que ver con los propósitos del investigador y las características del problema que se plantee. En esta investigación se tomo aspectos de ambos tipos, con encuestas que pedían la opinión y con evaluativos que cuantificaban el saber de los estudiantes y arrojaban datos numéricos en cuanto a porcentajes que advierten si el método propuesto contribuye a mejorar la calidad del proceso de aprendizaje de los participantes.

2.2.3 Tipos de Investigación

La investigación puede ser de varios tipos y, en tal sentido, se puede clasificar de distintas maneras, sin embargo es común hacerlo en función de su nivel, su diseño y su propósito. Sin embargo, dada la naturaleza compleja de los fenómenos estudiados, por lo general, para abordarlos es necesario aplicar no uno sino una mezcla de diferentes tipos de investigación. Así, en función de su nivel, el tipo de investigación puede ser **Descriptiva**, **Exploratoria** o **Explicativa**.

2.2.4 Investigación Descriptiva:

En las investigaciones de tipo descriptiva, llamadas también **investigaciones diagnósticas**, buena parte de lo que se escribe y estudia sobre lo social no va mucho más allá de este nivel. Consiste, fundamentalmente, en caracterizar un fenómeno o situación concreta indicando sus rasgos más peculiares o diferenciadores.

El **objetivo** de la investigación descriptiva consiste en llegar a conocer las situaciones, costumbres y actitudes predominantes a través de la descripción exacta de las actividades, objetos, procesos y personas. Su meta no se limita a la recolección de datos, sino a la predicción e identificación de las relaciones que existen entre dos o más variables. Los investigadores no son meros tabuladores, sino que recogen los datos sobre la base de una hipótesis o teoría, exponen y resumen la información de manera cuidadosa y luego analizan minuciosamente los resultados, a fin de extraer generalizaciones significativas que contribuyan al conocimiento.

2.2.5 Investigación Exploratoria:

Es aquella que se efectúa sobre un tema u objeto desconocido o poco estudiado, por lo que sus resultados constituyen una visión aproximada de dicho objeto, es decir, un nivel superficial de conocimiento. Este tipo de investigación, de acuerdo con **Sellriz** (1980) puede ser:

a) Dirigido a la formulación más precisa de un problema de investigación, dado que se carece de información suficiente y de conocimiento previos del objeto de estudio, resulta lógico que la formulación inicial del problema sea imprecisa. En este caso la exploración permitirá obtener nuevo datos y elementos que pueden conducir a formular con mayor precisión las preguntas de investigación.

b) Conducente al planteamiento de una hipótesis: cuando se desconoce al objeto de estudio resulta difícil formular hipótesis acerca del mismo. La función de la investigación exploratoria es descubrir las bases y recabar información que permita, como resultado del estudio, la formulación de una hipótesis. Las investigaciones exploratorias son útiles por cuanto sirven para familiarizar al investigador con un objeto que hasta el momento le era totalmente desconocido, sirven como base para la posterior realización de una investigación descriptiva, pueden crear en otros investigadores el interés por el estudio de un nuevo tema o problema y pueden ayudar a precisar un problema o a concluir con la formulación de una **hipótesis**.

2.2.6 Investigación Explicativa:

Se encarga de buscar el porqué de los hechos mediante el establecimiento de **relaciones causa-efecto**. En éste sentido, los estudios explicativos pueden ocuparse tanto de la determinación de las causas (investigación **postfacto**), como de los efectos (investigación **experimental**), mediante la **prueba de hipótesis**. Sus resultados y conclusiones constituyen el nivel más profundo de conocimientos.

La investigación explicativa intenta dar cuenta de un aspecto de la realidad, explicando su significatividad dentro de una teoría de referencia, a la luz de leyes o generalizaciones que dan cuenta de hechos o fenómenos que se producen en determinadas condiciones.

Dentro de la **investigación científica**, a nivel explicativo, se dan dos elementos:

- Lo que se quiere explicar: se trata del objeto, hecho o fenómeno que ha de explicarse, es el problema que genera la pregunta que requiere una explicación.
- Lo que se explica: La explicación se deduce (a modo de una secuencia hipotética deductiva) de un conjunto de premisas compuesto por leyes, generalizaciones y

otros enunciados que expresan regularidades que tienen que acontecer. En este sentido, la explicación es siempre una deducción de una teoría que contiene afirmaciones que explican hechos particulares.

2.2.7 Tipo de investigación realizada según el alcance:

El tipo de investigación que se llevó a cabo en este estudio fue descriptivo con cierto valor explicativo (se trata de una explicación parcial). Concretamente, la investigación se inició como descriptiva, sobre la base de las variables encontradas en estudios descriptivos afines a la temática abordada y continuó con una investigación que brinda elementos explicativos.

En la investigación surgieron preguntas y con el propósito de responder a las mismas y someter a prueba la hipótesis formulada, es que se seleccionó un diseño específico de investigación, Para ello se realizó un análisis bibliográfico que permitió realizar la selección mencionada.

El diseño de una investigación se interpreta como el plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información que se necesita en un estudio de investigación. Incluye a los procedimientos y actividades tendientes a encontrar la respuesta a la pregunta de investigación.

Existen diferentes clasificaciones de los tipos de diseños, se considera, a continuación, la realizada por Hernández Sampieri: Investigación experimental y no experimental **Hernández Sampieri y cols. (2006).**

En un estudio experimental un investigador construye una situación y manipula de manera intencional a la variable independiente para evaluar el efecto sobre la variable dependiente en una situación de control. En un estudio no experimental el investigador observa situaciones ya existentes, no provocadas intencionalmente, para luego analizarlas. La

diferencia fundamental de ambos estudios radica en la posibilidad o no de manipular y controlar la variable independiente.

2.2.8 Diseños experimentales:

En un estudio experimental, el diseño es aquella estrategia o método que tiene por objetivo establecer relaciones inequívocas entre causa y efecto. En estos diseños se plantea la realización de un “experimento”.

Para ello, el propio científico es el que provoca el fenómeno que se va a estudiar (manipulación de la variable independiente). Por lo tanto, lo que se hace es incidir directamente sobre el fenómeno objeto de la investigación con la intencionalidad de producir un cambio sobre el mismo. Además, el experimentador habrá de aislar el fenómeno, de modo que no haya ningún otro elemento que pueda afectar la relación causal que está estudiando (control de variables). Esto significa que la situación de estudio debe controlarse totalmente para que no haya dudas respecto a que los cambios observados se deban a la acción directa del experimentador.

Un verdadero experimento requiere tres requisitos:

1) manipulación intencional de una o más variables independientes (supuestas causas) para analizar el efecto sobre una o más variables dependientes (efectos).

2) medición válida y confiable del efecto que la variable independiente tiene sobre la variable dependiente (se logra cuando el instrumento utilizado mide la variable que se pretende medir y al realizar diferentes mediciones sobre la misma variable, se obtiene siempre el mismo resultado).

3) control o validez interna de la situación experimental, esto se refiere al grado de confianza que se tiene que los resultados del experimento se interpreten adecuadamente y

sean válidos (se logra cuando hay control, es decir, controlar la influencia de otras variables extrañas en las variables dependientes).

El control en un experimento logra la validez interna y se consigue, por ejemplo, mediante dos o más grupos de comparación equivalentes en todo, excepto en las variables independientes que se pretenden manipular. La equivalencia inicial entre grupos implica que los grupos son similares entre sí al iniciarse el experimento; por ejemplo, uno de los métodos utilizados para conseguir dicha equivalencia es la asignación aleatoria o al azar de los sujetos a los grupos del experimento y el posterior control de homogeneidad entre los grupos.

Estos diseños, a su vez, se clasifican en: preexperimentos, experimentos puros o verdaderos y cuasiexperimentos, de acuerdo con el control que el investigador pueda ejercer sobre las variables intervinientes.

Preexperimentos: se llaman así, porque su grado de control es mínimo.

Experimentos puros o verdaderos: son aquellos que reúnen los dos requisitos para lograr el control y la validez interna que requiere un verdadero experimento: 1) grupo de comparación (manipulación intencional de la variable independiente o de las variables independientes) y 2) equivalencia de los grupos.

Cuasiexperimentos: se manipula deliberadamente al menos una variable independiente para ver su efecto y relación con una o más variables dependientes, pero difieren de los experimentos verdaderos en el grado de seguridad o confiabilidad que pueda tenerse sobre la equivalencia inicial de los grupos. En los diseños cuasiexperimentales los sujetos no son asignados al azar a los grupos ni emparejados; sino que dichos grupos ya están formados antes del experimento, se trabaja con “grupos intactos” formados por motivos ajenos al experimento (Hernández Sampieri y cols., 2006 op. cit.).

En estos diseños, la falta de aleatorización introduce posibles problemas de validez interna y externa. Como comenta Weiss (2006, c.p. Hernández Sampieri y cols., 2006, CD

anexo): “Estos diseños deben luchar con la selección como fuente posible de interpretación equivocada, lo mismo que con la interacción de la selección y otros factores; así como, posiblemente, con los efectos de la regresión”.

Además, como mencionan **Campbell y Stanley** (1966, c.p. Hernández Sampieri y cols., 2006, CD anexo): “Precisamente porque hay falta de control experimental total, es imprescindible que el investigador conozca a fondo cuáles son las variables particulares que su diseño específico no controla. Así, estará más pendiente de su posible influencia y tendrá mejores elementos para evaluarla”.

La ausencia de asignación al azar hace que se tenga especial atención al interpretar los resultados y sumo cuidado de no caer en interpretaciones erróneas. Las limitaciones deben identificarse con claridad, la equivalencia de los grupos debe discutirse y la posibilidad de generalizar los resultados, así como la representatividad, deberán argumentarse sobre una base lógica (Wiersma y Jurs, 2005, c.p. Hernández Sampieri y cols., 2006, CD anexo).

Los tipos de diseños cuasiexperimentales son muy parecidos a los de experimentos “puros”. Salvo en la asignación aleatoria, son iguales en todo, la interpretación es similar, las comparaciones son las mismas y los análisis estadísticos iguales (salvo que a veces se consideran las pruebas para datos no correlacionados).

2.3 Diseño de investigación seleccionado.

Se debe tener en cuenta que en una investigación educativa entran en juego las ciencias sociales y en éstas es imposible aislar, de alguna manera, los sujetos a investigar. En todo momento el experimento se realiza bajo la influencia de todos los factores que actúan sobre el objeto de investigación introduciendo algunos elementos complementarios que provocan cambios en la situación experimental, éstos son los denominados experimentos de campo.

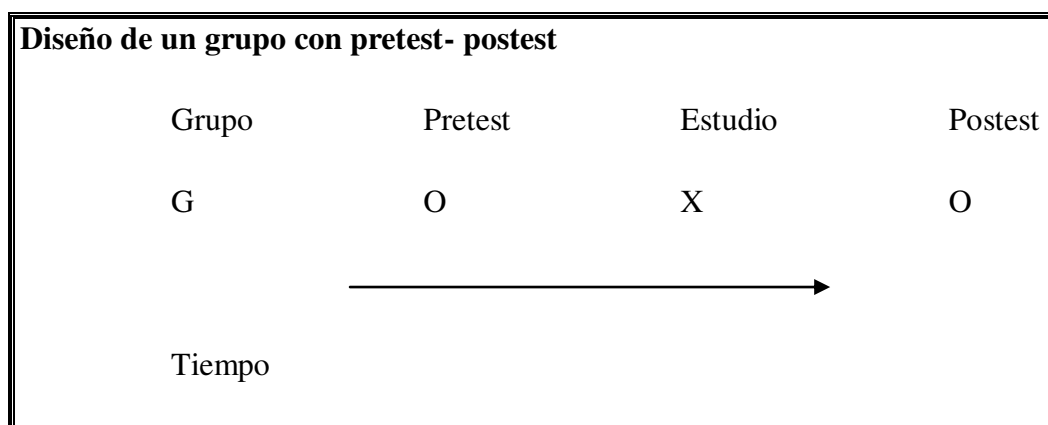
De acuerdo al problema planteado y al contexto que rodea al estudio y a las posibilidades institucionales, se realizará una investigación cuasiexperimental ya que no fue posible seleccionar aleatoriamente los sujetos, ni controlar todos los factores necesarios para determinar la relación de causalidad a través de un experimento puro, es decir, la situación no presentó la posibilidad de manipular y controlar la variable independiente con el rigor que requiere un experimento. Esta decisión se fundamenta en el hecho que los estudiantes no fueron seleccionados al azar, sino que el grupo estuvo formado antes del experimento.

Pero con la salvedad que la investigación se realizó sobre el desenvolvimiento académico de la asignatura de Análisis Matemático, en los tiempos regulares de la misma, las condiciones experimentales se garantizaron en la medida en que el momento de la investigación lo permitió.

El diseño seleccionado fue el denominado de **un grupo solo con pretest-postest**. En el mismo, el investigador realiza a un grupo un pretest (O), a continuación el tratamiento X y después del postest (O) (ver la figura N° 2).

El resultado que se analiza es un cambio del pretest al postest. La observación del pretest ocurre antes que se experimente la condición de tratamiento.

Figura N° 2



Este diseño fue presentado también por **McMillan y Schumcher** (2005, p. 345) con el nombre de Diseños de caso único. Se aplica en ésta investigación al grupo experimental, adaptándolo al proceso de enseñanza-aprendizaje durante la aplicación del Sistema de Tareas de la siguiente forma:

Se toma una prueba diagnóstico (pretest) y una prueba de la etapa final (postest) y se realiza un estudio del avance durante la aplicación del tratamiento: en cada etapa intermedia (1 y 2) se hacen observaciones para analizar la evolución de los aprendizajes.

La validez interna del diseño se refiere al control de todas las variables. Para atender a las posibles **amenazas** a la **validez** del diseño (tanto interna como externa) se tomaron una serie de controles. Entre ellos:

- La relativa a la **historia**: al no existir un grupo de control o de comparación, el investigador no puede estar seguro qué otros sucesos que hayan ocurrido entre el pretest y el postest, no hayan causado el cambio. “La medición repetida controla la variación normal que cabe esperar en cortos periodos de tiempo y ofrece una descripción clara y fiable de la conducta”, indica Mc Millan y Schumcher (2005, p. 345) refiriéndose a diseños de caso único que consiguen elevada validez interna con respecto a este aspecto.

- El efecto de la realización de un pretest puede sensibilizar a los sujetos hacia problemas específicos. Por esta posible amenaza, para que los estudiantes no se sientan “observados”, es que la prueba de diagnóstico se tomó de manera encubierta ofreciéndoles un repaso de los temas.

- La instrumentación puede ser una amenaza, por lo que en ésta investigación se tomaron las observaciones en condiciones similares (días, horarios y lugares).

- La mortalidad experimental en el caso que se pierden sujetos y que sucede en experimentos de larga duración. Esta investigación fue en corto período (20 días) y se realizó un seguimiento personalizado de la asistencia, con recuperaciones por inasistencia.

- La madurez (incluye cansancio, aburrimiento, etc.) de los sujetos si el tiempo entre el pretest-postest es largo, puede afectar los cambios de conducta. En esta investigación el tiempo fue relativamente corto entre el pretest y postest, de a lo sumo 3 semanas, de manera que la madurez de los sujetos no se vio afectada.

- Los sujetos del grupo experimental lo constituyen el total de estudiantes que cursaron la asignatura.

Por lo tanto, éstas variables externas no fueron una amenaza para la validez interna.

La **validez externa** consiste en ver cómo los resultados pueden ser trasladados a un grupo de un contexto mayor. Como se mencionó, en la mayoría de los experimentos, los investigadores controlan las amenazas a la validez interna eligiendo un diseño en particular, pero la validez externa no depende del diseño. La validez externa es difícil considerar ya que si se maximiza la validez interna, se sacrifica la validez externa.

El contexto en el cual se realizó el experimento fue en las aulas a las que asisten normalmente los estudiantes, tomando al grupo completo.

2.3.1 - Instrumentos y técnicas de esta investigación

Los instrumentos de investigación (instrumentos de recolección de datos) empleados fueron:

- La observación: se utilizó este instrumento para evaluar el comportamiento de los estudiantes al realizar las actividades y problemas de la especialidad contenidas en el Sistema de Tareas y que fueran planteadas por el docente en el tema Derivada y sus Aplicaciones.
- El cuestionario: se realizaron encuestas a los estudiantes del año 2015 antes y después de realizada la experiencia para conocer sus opiniones sobre aspectos relacionados con el Sistema de Tareas. (Anexo III)

- Sistema de Tareas conformado por teoría, ejercicios y problemas de aplicación presentado a los estudiantes. (Descripción en el Capítulo-III)
- Pretest y Postest o Pruebas de constatación: Se realizaron dos pruebas que contenían ejercicios para medir los grados de independencia y reflexión de la variable Calidad del Aprendizaje de los estudiantes. Se consideraron ejercicios correspondientes al tema Derivada y sus Aplicaciones. Los instrumentos mencionados evaluaron contenidos con igual grado de dificultad en las dimensiones: grado de independencia y grado de reflexión de la variable dependiente. (Anexos V y VI)

En los capítulos posteriores se realizará la descripción, el análisis de los instrumentos empleados y se darán a conocer los resultados obtenidos. La eficiencia de cada uno de los instrumentos que se utilizaron en la investigación fue valorada durante su correspondiente periodo de utilización.

Los problemas presentados en el pretest y postest fueron sometidos a juicio de expertos como se verá en el Capítulo IV. La validez, confiabilidad y consistencia del Sistema de Tareas estuvo avalada por el marco teórico que se presentó en ésta tesis.

En los próximos capítulos de éste trabajo de investigación, se presenta el estudio experimental realizado con a los estudiantes de la asignatura Análisis Matemático de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. En ellos se exponen los procedimientos de recolección de información (encuestas, pruebas) que permitieron evaluar la metodología empleada. Se describen los instrumentos empleados y los resultados obtenidos.

Se aplicaron pruebas no paramétricas para muestras pareadas y dependientes para cada una de las variables consideradas. Estos contrastes permitieron comprobar que hay diferencias entre las distribuciones de dos poblaciones a partir de dos muestras dependientes

o relacionadas; es decir, que cada elemento de una muestra está emparejado con un elemento de la otra, de tal forma que los componentes de cada pareja se parezcan entre sí lo más posible, por lo que hace referencia a un conjunto de características que se consideran relevantes.

La prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para datos pareados, indicó que existe diferencia entre los Grados de Conciencia y de Independencias de los estudiantes. En este mismo sentido, a partir de la prueba No Paramétrica de los Signos para observaciones pareadas, se observó que el número de diferencias positivas es considerablemente mayor al de diferencias negativas, por lo cual se rechaza con un nivel de significación $\alpha = 0.05$ la hipótesis nula de igualdad de los Grados de Conciencia y de Independencia promedios antes y después de la metodología aplicada. La diferencia es a favor del Postest.

Estos resultados, se desarrollan, en el Capítulo IV.

CAPITULO III

Diseño del Sistema de Tareas

3.1.- Metodología para la confección del Sistema de Tareas.

El programa de estudio de la asignatura Análisis Matemático señala, como algunos de los objetivos generales, desarrollar en los estudiantes habilidades y conocimientos para adquirir un pensamiento crítico, reflexivo, flexible, capaz de realizar generalizaciones, clasificar y relacionar lo estudiado con los diferentes ecosistemas.

En el diseño del Sistema de Tareas, fue necesario conjugar de forma armónica una Estrategia Pedagógica adecuada a la enseñanza del Análisis Matemático, expresando las habilidades que se desean formar en los estudiantes a través de los objetivos propuestos.

Se tomó la Teoría de la Formación de las Acciones Mentales de P. Ya. Galperín como uno de los basamentos teóricos que sustenta la elaboración del Sistema de Tareas en el que se modelan sus diferentes situaciones problemáticas.

Esto es, en ningún momento el estudiante permanece pasivo ante el desarrollo de la clase puesto que los docentes siempre están atentos a cada acción que realice, ofreciéndole, en cualquier caso una respuesta. Cumpliendo de éste modo con una de las propuestas de carácter psicológico de Jean Piaget cuando afirma que el elemento fundamental del pensamiento es la acción. Puesto que es a partir de las operaciones concretas, como se constituyen las operaciones efectivas y, de la interiorización de estas últimas surge la operación intelectual o el pensamiento.

Se diseñaron tareas para cada una de las etapas del proceso de asimilación, por lo que brinda al alumno la opción de regular su proceso de adquisición de conocimientos así como su retroalimentación y criterios para su corrección si fuera necesario.

Por otra parte el profesor puede controlar el tránsito por las diferentes etapas en el proceso de asimilación de los estudiantes, así como el grado de formación de las distintas características de la acción a formar en dicho proceso.

Así pues, una de las características fundamentales de éstas clases es poder brindar al estudiante, cada vez que se introduce un concepto o noción, la posibilidad de realizar acciones concretas para lograr la interiorización de éstas operaciones efectivas. Al internalizarse estas acciones formarán, a su vez, lo que se denomina la operación intelectual, trayendo al tapete el problema real similar que fue enseñado por el docente de la cátedra y el docente de la asignatura de materias del ciclo superior

Sin desconocer otras vías para la asimilación de los contenidos, se entiende que el Sistema de Tareas es necesario para culminar el proceso de asimilación, ya que se ha diseñado para que, mediante él, se resuelvan ejercicios y problemas para las distintas etapas del proceso de asimilación. (Materializada, Verbal y Mental)

3.2.- Fundamentos principales

Es indudable que el carácter integral de la solución de las tareas científicas y económicas actuales y la alta eficiencia de los especializados métodos utilizados para influir sobre los objetivos de trabajo, exigen una alta preparación del futuro profesional. Debe poseer habilidades y hábitos basados en una esfera especializada del conocimiento, razón por la que en las aulas universitarias siempre ha estado el futuro del país y muchos han sido los esfuerzos, durante años, para perfeccionar este sistema educativo.

De esta forma, en todas las especialidades, se han conformado los planes de estudio y el modelo del profesional, instrumentos indispensables para la concepción de la impartición de las asignaturas de las disciplinas y la formación integral del estudiante. No obstante, aunque “casi todo” está establecido, lo cierto es que en ocasiones se dificulta para el colectivo profesoral el “cómo” hacerlo, requiriendo de un trabajo metodológico que trascienda de la disciplina al año y a la carrera.

La formación eficiente del Ingeniero Agrónomo es no sólo una preocupación de algunos, sino la ocupación de muchos, pues éste profesional es el más integral de los encargados de la producción agrícola y debe estar en condiciones de dar solución a los complejos problemas que se presentan en las unidades básicas productivas; debemos formarlo para que sea capaz de asimilar los progresos de la ciencia y la técnica así como los nuevos retos y formas de actividad a las que se enfrentará.

¿Cómo ha contribuido la disciplina Matemática a este empeño?

- **Determinando** las necesidades y requerimientos matemáticos del ingeniero.
- **Desarrollando** evaluaciones integradoras que permiten el cumplimiento del objetivo instructivo en primer año.
- **Elaborando** medios de enseñanza acordes al nuevo enfoque planteado.

En otras palabras, la matemática será el lenguaje formalizado de la interdisciplinariedad, que permitirá a los estudiantes resolver problemas, donde se relacionen los de contenidos Químicos, Físicos, Biológicos y Sociales que actúan en un agro-ecosistema, con el auxilio de la computación como herramienta.

De ésta forma, no sólo se ha cambiado la concepción en la impartición de las asignaturas de la disciplina, desarrollando en el estudiante habilidades del pensamiento lógico, en la modelación matemática y el pensamiento algorítmico, sino que estamos en condiciones de propiciar, al resto de las disciplinas de la carrera, los modelos matemáticos que más frecuentemente el estudiante o profesor encontrarán en libros, artículos científicos y en la práctica profesional.

3.3.- La Derivada.

3.3.1.- El Concepto

La derivada es un concepto que tiene muchas aplicaciones. Se aplica en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación. Es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología, o en ciencias sociales como la Economía y la Sociología. Por ejemplo, cuando se refiere a la gráfica en dos dimensiones de f , se considera la derivada como la pendiente de la recta tangente del gráfico en el punto x . Se puede aproximar la pendiente de esta tangente como el límite cuando la distancia entre los dos puntos, que determinan una recta secante, tiende a cero, es decir, se transforma la recta secante en una recta tangente. Con esta interpretación, pueden determinarse muchas propiedades geométricas de los gráficos de funciones, tales como concavidad o convexidad y, principalmente determinación de máximos y/o mínimos.

Entre las complejidades de la función derivada se encuentra su lenguaje: la simbología, las representaciones (internas-externas), los contextos de aplicación, las interpretaciones (sintácticas y semánticas) y la relación enseñanza-aprendizaje. De acuerdo con lo anterior es posible estudiar la complejidad de la función derivada en cuatro dimensiones: Histórica, epistemológica, cognitiva y didáctica, **Eliseo Ramírez Rincón** (2009). El motivo principal de este trabajo es el estudio de la dimensión didáctica.

3.3.2.- De origen Didáctico o de Enseñanza

a. La derivada en un punto.

En los textos se da cuenta de las habilidades para hacer conversiones transitando de las representaciones gráficas a las algebraicas, pero muestra también la preponderancia de los

procedimientos de carácter algorítmico algebraico, ligados más a procedimientos de carácter puntual centrados en la noción de convergencia.

Por otra parte, es posible que esta dificultad tenga elementos de carácter epistemológico asociado.

b. Dificultad para concebir a la derivada como una función y caracterizarla de manera global.

La detección de ésta dificultad está en el aprendizaje de la derivada y los procesos de derivación, en donde prevalece una concepción puntual mediante la identificación que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto. En la creación de dicha dificultad concurren diferentes factores, algunos epistemológicos y otros de carácter didáctico.

Además, tener la concepción de función como objeto, es necesario para entender que la derivada de una función es otra función y que la solución de un problema —por ejemplo, una ecuación diferencial— podría ser una función.

c. Tangencia local contra la concepción dinámica (sucesión de secantes).

Se presenta cuando se enseña la derivada apoyada en la concepción de D'Alambert (1932), debido a la conservación del carácter estático en la determinación de la tangente en la Geometría Euclidiana (pues es dada como un lugar geométrico), es difícil comprender que por medio de una sucesión de secantes se obtenga realmente la tangente.

d. La algebrización del cálculo diferencial escolar.

Esta dificultad es señalada por (Artigue, Gascón, 1998) que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo y se basa en las operaciones algebraicas con límites y derivadas, pero que trata de una forma simplista las ideas y técnicas específicas del

Análisis como son la idea de razón de cambio instantáneo, o el estudio de los resultados de esas razones de cambio.

e. Los ejemplos prototípicos de un concepto.

Es el ejemplo que posee características que son atributos no requeridos por la definición. Aunque los ejemplos colaboran al interpretar la definición, el problema que involucra es que si la gama que se presenta en el texto no es suficientemente rica, se corre el riesgo de generalizar los atributos comunes a dichos ejemplos como si fueran todos relevantes al concepto.

Por todo lo dicho, los atributos irrelevantes corren el riesgo de convertirse en una dificultad de origen didáctico o de enseñanza, al ser transferidos como característicos del concepto. En algunas ocasiones, esto lleva a rechazar objetos que cumplen con la definición y en otros casos, reconocen como ejemplo un objeto que asocian al prototipo aunque no cumpla con los requisitos de su definición del concepto.

f. Terminología que utiliza el texto.

En la enseñanza de la matemática se puede encontrar tres tipos diferentes de palabras (Pimm, 1987):

- Palabras técnicas, que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano.
- Términos que aparecen en matemática y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos, como límite, convergencia o derivada.
- Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

Esta dificultad se refiere al uso de las palabras del lenguaje ordinario para otorgar significado a un concepto científico.

g. Uso de la terminología matemática.

El lenguaje matemático adquiere la facultad durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de facilitar la expresión de los conceptos pero, se puede configurar en una dificultad al otorgarle más importancia a la notación que al significado del concepto.

h. Desarrollo de la estructura lógica matemática.

La construcción de las estructuras conceptuales matemáticas se debe regir por la lógica interna del área, que se debe distinguir entre hechos y resultados. La veracidad de los resultados como teoremas, proposiciones o corolarios, está sujeta a ciertas hipótesis, que se configuran como hechos. En los textos, ésta estructura lógica es una dificultad que se observa a partir de no fijar correctamente ciertas hipótesis para los resultados.

i. Falta de enlace para crear una estructura conceptual.

Es el intento de relacionar un concepto con una estructura conceptual sin ser capaz de establecer dicho enlace, obstaculizando la posterior construcción y comprensión de nuevos conceptos que dependen de éste, impidiendo la generalización de dicha noción.

3.3.3.- De origen Epistemológico

I. Desdoblamiento de la derivada.

Esta dificultad surge de la discusión que hace **Duval** (1983) sobre el obstáculo del desdoblamiento de los objetos matemáticos. De acuerdo con éste autor el obstáculo del desdoblamiento aparece cuando el estudiante debe separar propiedades o características, hasta entonces fuertemente asociadas a un objeto, o atribuir denominaciones y representaciones diferentes a un objeto que se piensa que es el mismo (Duval, 1983)

La resistencia que presentan éstas concepciones ante distintos intentos instruccionales muestra que se está ante una dificultad con raíces epistemológicas. Evidentemente, no se puede concluir de ahí que con la sola “maduración” el estudiante alcanzará un nivel de conceptualización conforme al cuerpo teórico de la matemática. Es necesaria la intervención de procesos didácticos bien planificados, que tengan en cuenta las dificultades que el estudiante tiene que vencer.

II. El problema de calcular el ritmo de cambio.

Este problema surgió directamente del dominio de la mecánica en el intento de enfrentarse con movimientos donde la velocidad y la aceleración variaban con el tiempo: se trataba de encontrar la velocidad y aceleración en cualquier instante a partir de la ecuación de la posición, e inversamente, calcular la velocidad y el desplazamiento sobre la trayectoria a partir de la ecuación de la aceleración de un cuerpo en función del tiempo.

En éstos casos, el concepto de velocidad media resultaba insuficiente: no podía calcularse la velocidad en un instante, pues al ser cero tanto el desplazamiento como el tiempo empleado, se llegaba a la indeterminación: $\frac{0}{0}$. Del mismo modo, no podía calcularse el desplazamiento multiplicando la velocidad por el tiempo empleado, pues si la velocidad cambiaba durante ese intervalo de tiempo, ¿qué valor de la velocidad debía tomarse?

Se debe resaltar, como señala Schneider (1992), que las dificultades que plantearon históricamente éstos problemas iban más allá de la comprensión del concepto de límite y procedían también de una visión fuertemente empirista de las ciencias en general y de la Matemática en particular; una visión que se negaba a admitir la existencia de conceptos como el de velocidad instantánea por carecer de un referente empírico directo.

En efecto, la velocidad media es un concepto que puede ser percibido coordinando las sensaciones de duración y desplazamiento y puede ser medido; por el contrario, la

velocidad instantánea es un objeto mental que escapa al universo de los sentidos -no existen ahora las sensaciones mencionadas- y de la medida directa. Según la autora, la dificultad consiste en que “se le niega a la Matemática el derecho (o simplemente la posibilidad) de delimitar con precisión algo que los sentidos no aprehenden más que imperfectamente”; debido a ésta dificultad, se pretende llegar al concepto de velocidad instantánea a través del mundo de los sentidos, del cual escapa una y otra vez, lo que provoca un claro rechazo hacia el concepto de velocidad instantánea.

El problema de calcular la velocidad instantánea y la distancia recorrida en movimientos no uniformes muy pronto se transformó en un caso especial como el problema de calcular el ritmo de cambio instantáneo de una variable con respecto a otra, y su inverso. Su solución fue propuesta principalmente por Newton.

III. El problema de encontrar la tangente a una curva dada.

Se trata de un problema de geometría pura pero con importantes aplicaciones en el dominio de la óptica y en el de la mecánica. El concepto mismo de tangente no está claro, pues la concepción griega de línea que toca a la curva en un sólo punto y se encuentra a un lado de la misma, no es suficiente para curvas que van más allá de las cónicas.

IV. El problema de calcular valores máximos y mínimos de una función.

Era un problema de interés para muchas ramas de la ciencia apareciendo por ejemplo cálculos de optimización, o en relación con el ángulo que determina el alcance máximo de un proyectil.

V. Dificultad en la interpretación del papel de las definiciones de la derivada en la actividad matemática.

La definición se ve como la descripción de un objeto ya conocido por los sentidos o por “insight”, no es la definición quién determina al objeto sino que el objeto determina a la definición. **Sierpinska** (1992).

VI. La derivada como un límite.

Se manifiesta en la tendencia a evadir los procesos infinitos y a rechazar el paso al límite como una nueva operación matemática, se considera el límite sólo como una aproximación. **Sierpinska** (1992).

3.4.- Necesidades y requerimientos matemáticos del Ingeniero Agrónomo

Para lograr la formación de Ingenieros Agrónomos capaces de desplegar su actividad en la producción moderna, se hace necesario organizar la preparación ininterrumpida de los estudiantes en el campo de la matemática, específicamente en la Modelación Matemática, entendida como el proceso mediante el cual un ingeniero o un investigador diseña y construye un modelo que representa un objeto o sistema real, siendo una herramienta para resolver determinados problemas. Es por todo lo descrito que aseguramos la importancia que tiene el uso de los modelos en la formación del Ingeniero Agrónomo, para poder establecer relaciones entre variables, analizar comportamiento de funciones, describir fenómenos conocidos o por establecerse, de manera tal de poder llegar a resultados en términos cuantitativos y cualitativos, tomar decisiones y seleccionar alternativas de solución más adecuadas. Para ayudar a visualizar esto es que se construyó un Tesauro (Ver Anexo N° I) en el cual se expresó las asignaturas en las cuales se aplican conceptos de Derivada.

3.4.1- Importancia del Tesauro

Tesauro es una noción que procede del vocablo latino thesaurus, aunque su origen etimológico más lejano se halla en el griego. El concepto refiere a un tesoro, teniendo en cuenta su acepción como una antología, un catálogo o un índice.

En éste trabajo el tesauro (Ver Anexo I), es una tabla de doble entrada, en la cual, una de dichas entradas es el tema contenido en La Derivada y sus Aplicaciones y presenta los conceptos que se utilizan para el desarrollo de dicho tema, mientras que en la otra entrada está el nombre de la asignatura específica de la especialidad que utiliza el concepto.

Su finalidad fue analizar en qué asignaturas de la carrera el tema en cuestión es utilizado y fue hecho con el propósito de tener un panorama amplio para desarrollar el estudio y que el estudiante sepa, mediante el mismo, la importancia que el tema tiene en temas concretos de la Agronomía. La construcción del mismo demandó el estudio de programas, pero sobre todo la entrevista con diferentes docentes, de manera informal; ésto trajo aparejado comprender, como otra cuestión relevante, la importancia del tema.

También tiene la importancia que los estudiantes de agronomía relacionen, en una primera instancia que los procesos químicos, físicos, biológicos y sociales que ocurren en los agro-sistemas, están ligados con los temas del Análisis Matemático, sobre todo la Derivada y sus Aplicaciones, utilizando modelos matemáticos con el auxilio de la informática computación como herramienta y con el apoyo de la bibliografía necesaria y disponible.

El trabajo profesional en la esfera agrícola no está exento del desarrollo matemático alcanzado, su aplicación a problemas biotecnológicos, el uso de técnicas de simulación, entre muchos otros, así lo confirman mundialmente.

El tema de éste trabajo tiene como objetivo fundamental modelar situaciones que conduzcan a problemas de la rama agropecuaria con una interpretación que justifique su efectividad, utilizando la misma como una herramienta de trabajo sistemático, que agilice y de respuestas efectivas a dichos problemas.

En el Cuadro N°1, se destaca la influencia de algunos núcleos básicos de la Matemática y las disciplinas en las cuales hay incidencia. El mismo, se realizó como complemento del Tesauro y el resultado de haber indagado y estudiado algunos de los

núcleos en donde se hace presente la Derivada pero por sobre todo, su aplicación a fenómenos de la Agronomía.

Cuadro N°1: Núcleos básicos del Análisis Matemático incluidos en las disciplinas de la especialidad

Núcleos Básicos	Disciplinas de la especialidad:
Funciones	Física, Química, Riego y Drenaje y Biología.
Algebra Lineal	Física, Química, Riego y Drenaje
Geometría Analítica	Riego y Drenaje, Física
Calculo diferencial e integral	Física, Química, Biología, Riego y Drenaje, Mecanización Agropecuaria, Producción Agrícola, Fitotecnia General.
Ecuaciones diferenciales.	Zootecnia General, Fitotecnia General, Química, Biología, Física, Fisiología vegetal.
Programación matemática	Producción Agrícola, Mecanización Agropecuaria, Riego y Drenaje, Zootecnia General.

Fuente: Facultad de Agronomía y Agroindustrias – UNSE

Analicemos algunos de los **modelos** que con más frecuencia se utilizan en las diferentes disciplinas de la especialidad de Agronomía, refiriendo al núcleo básico al que pertenecen:

- **Cálculo del pH** (la sigla significa ‘potencial hidrógeno’, ó ‘potencial de hidrógeno’) que es una medida de acidez o alcalinidad de una disolución. El pH indica la concentración de iones hidronio $[H_3O^+]$ presentes en los suelos. La concentración de Hidronio, nos permite estudiar una de característica de los suelos así como el proceso inverso (funciones).

- **Curvas de respuesta** (funciones). La relación entre los incrementos del rendimiento de los cultivos y el nutriente con que son abonados se denomina curva de respuesta al fertilizante. En general, el incremento del rendimiento que resulta de cada sucesiva adición de nutriente, va siendo cada vez menor. Este fenómeno se denomina ley de los aumentos decrecientes. Matemáticamente, puede hallarse un gran número de formas funcionales que reflejan la disminución de los incrementos.

Entre las curvas de respuesta a los fertilizantes comúnmente usadas, figura la siguiente:

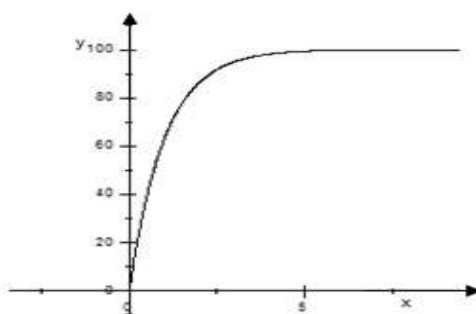
Ecuación de MITSCHERLICH

- Esta es una ecuación que liga o relaciona los rendimientos y con la acción del factor productivo x . Para ello, propone que el incremento instantáneo de rendimientos dy al variar el factor productivo considerado dx es proporcional al incremento de rendimiento que aun es posible obtener para el máximo accesible A , esto se expresa por:

$$\frac{dy}{dx} = c (A - y) \Rightarrow y = A(1 - e^{-cx}). \quad \text{Los valores de } c \text{ se obtienen de tablas. La}$$

gráfica de esta función, se observa en el Gráfico N° 1

Gráfico N°1: Gráfica de la función definida por la ecuación de Mitscherlich



Sus limitaciones son:

1. No considera que el rendimiento inicial sin aplicación de fertilizante es función de la composición inicial del suelo;
2. No toma en cuenta la brusca disminución de los rendimientos producidos por una sobredosis de fertilizantes;

Otros ejemplos:

- El equilibrio de una partícula cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre esa partícula es cero (Álgebra Lineal);
- Dos parcelas de la misma clase de tierra, pero una horizontal y otra a media ladera, que tengan ambas la misma superficie agraria, tienen la misma capacidad productiva. La importancia de los surcos, teniendo en cuenta las curvas de nivel, es proteger los cultivos de la erosión de los suelos producto de las lluvias (Geometría Analítica);
- Cálculo de la dosis óptima de fertilizantes, basado en modelos continuos de respuesta. (cálculo diferencial e integral, **Bradley** (1990))
- Condición de máxima eficiencia en la sección transversal de un canal con la misma inclinación de taludes (cálculo diferencial e integral, **Bradley** (1990));
- Condición de mínima filtración en la sección transversal de un canal con la misma inclinación de taludes (cálculo diferencial e integral, **Bradley** (1990));
- Para calcular trabajo en los isoprocesos (cálculo diferencial e integral, **Bradley** (1990))
- Para calcular área de terrenos de forma irregular a partir de mediciones en el campo cálculo diferencial e integral de **Bradley** (1990))
- Cálculo del índice de crecimiento de una planta (cálculo diferencial e integral, **Bradley** (1990))
- Infiltración: Se define infiltración como el proceso mediante el cual el agua traspasa la superficie del suelo y entra al subsuelo quedando a disposición de las raíces de las plantas.

$$I(\text{infiltración}) = \frac{d(kt^m)}{dt} = k m t^{m-1}$$

Donde k y m son datos experimentales de estructura, compactación y textura del suelo obtenidos éstos de tablas. Fórmula de A.N. Kostiakov (1932). Establecida mediante investigaciones teóricas y experimentales

- Distribución normal (cálculo diferencial e integral, **Bradley** (1990));

Se utiliza fundamentalmente para comparar poblaciones de plantas o animales.

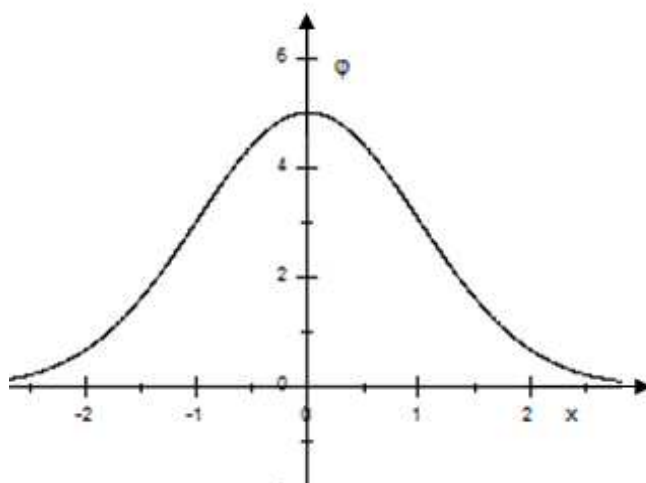
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in IR$$

$$\text{Por lo tanto: } \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \forall z \in IR$$

A continuación, se presenta la Gráfica de ésta función.

Gráfico N°2: Gráfica de la función definida por la ecuación

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \forall z \in IR$$



Con el uso de tablas estadísticas se puede hallar el área bajo ésta curva o en algún intervalo que sea de interés para calcular la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno de carácter agropecuario.

Crecimiento o Decrecimiento de una población de Bacterias (Ecuaciones Diferenciales)

Bajo el supuesto que la velocidad de multiplicación es proporcional al número disponible de bacterias en cada instante, se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dB}{dt} = kB, \quad k > 0 \quad (1)$$

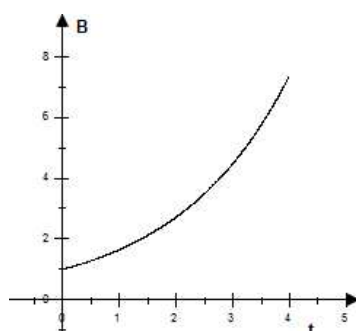
B = número de bacterias presentes en t minutos

t = tiempo

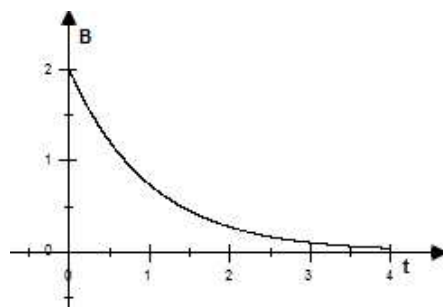
k = constante de proporcionalidad.

Su solución es $B(t) = C e^{kt}$, que se reconoce como curva de crecimiento exponencial y graficada se obtiene:

Gráfico N°3: Gráfica de la función definida por la ecuación $B(t) = C e^{kt}$



En la Gráfica N°3, se observa que a medida que transcurre el tiempo, el número de bacterias crece exponencialmente y si $\frac{dB}{dt} = kB$, con $k < 0$ (2)



En Fisiología Vegetal: Mediante el empleo del método clásico, basado en las fórmulas para valores promedios propuestos por Watson (1952), Yoshida (1972) y Hunt (1978) en el artículo científico publicado por Jaime Barrera, Diego Suárez, Luz Marina Melgarejo del Laboratorio de fisiología y bioquímica vegetal – Departamento de biología – Universidad Nacional de Colombia, se pueden calcular índices de crecimiento tales como las que se muestran en la siguiente tabla. Claramente se ve cómo está presente la derivada como una aplicación.

Cuadro N°2: Fórmulas para valores promedios en Fisiología Vegetal

Índice de crecimiento	Símbolo	Valor Instantáneo	Valor promedio en un intervalo de tiempo $(t_2 - t_1)$	Unidades
Tasa de crecimiento relativo	TCR	$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt}$	$TCR = \frac{(\ln w_2 - \ln w_1)}{(t_2 - t_1)}$	$\frac{gr}{día}$
Tasa de asimilación neta	TAN	$\frac{1}{\Delta F} \frac{dW}{dt}$	$TAN = \frac{\frac{(W_2 - W_1)}{(t_2 - t_1)}}{\frac{\ln AF_2 - \ln AF_1}{AF_2 - AF_1}}$	$\frac{gr}{cm^2 día}$
Índice de área foliar	IAF	$\frac{\Delta F}{\Delta s}$	$IAF = \frac{\frac{(AF_2 - AF_1)}{2}}{\frac{1}{\Delta s}}$	Dimensiones según las unidades
Tasa de crecimiento del cultivo	TCC	$\frac{1}{\Delta s} \frac{dW}{dt}$	$\frac{1}{\Delta s} \cdot \frac{(W_2 - W_1)}{(t_2 - t_1)}$	$\frac{gr}{cm^2 día}$
Tasa absoluta de crecimiento	TAC	$\frac{dW}{dt}$	$TAC = \frac{(W_2 - W_1)}{(t_2 - t_1)}$	$\frac{gr}{día}$
Duración de área foliar	DAF	–	$DAF = \frac{(AF_2 + AF_1) \cdot (t_2 - t_1)}{2}$	$\frac{cm}{día}$
área foliar específica	AFE	$\frac{\Delta F}{MF}$	$AFE = \frac{\left(\frac{AF_2}{W_2} + \frac{AF_1}{W_1}\right)}{2}$	$\frac{cm^2}{día}$

Han sido sólo algunos ejemplos de la enorme variedad de modelos matemáticos que reflejan, mediante expresiones, un proceso biológico, químico o físico. La matemática y en particular el Análisis Matemático, le brinda al estudiante la posibilidad de modelarlo, resolverlo e interpretar la solución obtenida, así como desarrollar en él las habilidades del

pensamiento lógico que propicien volver al objeto inicial y comparar fenómeno solución y elaborar conclusiones, desarrollando capacidades en la toma de decisiones. Pero debemos lograr que éstas disciplinas, en años superiores, enfoquen éstos fenómenos de la misma forma, como continuidad del proceso integral de formación del ingeniero. Contribuir poco a poco, entre todos, a erradicar de la mente de estudiante, profesores y profesionales la idea de la poca o nula necesidad de la matemática en la formación del agrónomo.

A continuación, se presenta el Sistema de Tareas basado en las teorías psicológicas del aprendizaje y en el uso de Modelos Matemáticos y que fuera diseñado para el Tema: Derivada y sus Aplicaciones. El mismo se implementó en el periodo lectivo 2015 a los estudiantes que cursaron la asignatura Análisis Matemático en la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero. Cabe aclarar que éste diseño podrá extenderse a la totalidad del contenido del programa de la asignatura. A su vez, el mismo tiene un gran aporte hecho por los profesores de asignaturas específicas, de años posteriores, los que se presentaron en la clase luego de haber presentado el tema Aplicaciones de la Derivada en forma tradicional. De esta manera es que se presentó el Sistema de tareas.

3.5.- Guía de estudio del tema derivada y sus aplicaciones

3.5.1 DERIVADA Y SUS APLICACIONES – 1^{ra} etapa

Importancia del tema de estudio

En ésta etapa comienza el estudio de Derivada y sus Aplicaciones. El concepto fundamental a tratar es, sin dudas, derivada de una función en un punto. Sin embargo también veremos su aplicación a otros problemas donde se analiza la razón de cambio de una magnitud respecto a otra.

Muy especialmente se aplicará el concepto de tasa de variación media e instantánea al estudio de temas específicos que atañen al estudiante que recién ingresa a la carrera de ingeniero agrónomo como ser crecimiento, decrecimiento, concavidad gráfica de funciones, etc., terminando con optimización, esto se desarrollará tal como se encuentra programado. Luego, en el tema de optimización, se introducirán los de máxima absorción de nutrientes, permeabilidad de suelos, penetración del agua en diferentes suelos, comparado estos con los temas fijados por la Derivada y sus Aplicaciones en el Análisis tradicional.

Es importante que se desarrollen habilidades en el cálculo de las derivadas de funciones y el tema de optimización, ya que éste es uno de los objetivos fundamentales del tema.

Todos los conceptos, definiciones, teoremas y situaciones problemáticas que se estudian en este tema serán aplicados y ampliados en los restantes de la asignatura y, aún más, en las asignaturas básicas específicas de las carreras que se cursan en la Facultad. Es por ello que se sugiere un cuidado especial en el estudio del mismo.

Conocimientos previos requeridos

Para el estudio de ésta unidad es necesario tener actualizados los siguientes temas (Anexo IV):

- **Funciones de una variable real:** distinguir las diferentes funciones, conocer sus características (dominio, rango, gráfica, ceros, crecimiento y decrecimiento).
- **Límite de funciones de una variable real:** tener muy claro el concepto de límite así como su generalización, tanto en forma gráfica como analítica. Poseer agilidad en el cálculo de límites en general
- **Funciones continuas en un punto y en un intervalo:** Este concepto está totalmente ligado al tema en estudio, por lo que es necesario reconocer funciones continuas y

discontinuas, y analizar desde el punto de vista analítico y gráfico, si una función dada es o no continua.

3.5.2 ESTRUCTURACION DE LAS CLASES PRÁCTICAS

Sumario:

- Derivada de una función en un punto.
- La derivada como pendiente.
- Aplicaciones de la derivada.
- Optimización.

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

- Interpretar el concepto de derivada de una función en un punto de manera analítica y gráfica.
- Calcular derivadas de funciones de una variable real, aplicando la definición y con reglas de derivación.
- Aplicar el concepto de derivada utilizando modelos matemáticos que se articulen con temas específicos de la carrera de Ingeniería Agronómica.

3.6. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

TEMA: DERIVADA Y SUS APLICACIONES

3.6.1 Etapa materializada

Contenidos conceptuales: Definición de la derivada, interpretación geométrica, métodos para encontrar extremos y clasificarlos

Objetivos específicos:

- Interpretar la definición de derivada de variable real en un punto, de manera analítica y geométrica.
- Calcular los puntos críticos analizar máximos y/o mínimos utilizando el concepto de derivada de una función.
- Transferir los conocimientos adquiridos a problemas de optimización aplicados a situaciones reales.

3.6.1 Método en el aula:

Para desarrollar los contenidos de la primera etapa se utiliza una discusión heurística entre el profesor y los estudiantes, luego de expuesto el tema como se suele hacer. La observación resultó por demás importante dado que los estudiantes al sentirse contenidos, con la asistencia de los ayudantes de cátedra más la mirada atenta del profesor, fue para ellos tranquilizador, a medida que la clase avanzaba. El profesor favorece a que el estudiante pregunte y les explica el porqué de la pregunta; les explica el profesor de acuerdo a su criterio, que cualquier pregunta, tiene cuatro aspectos importantes para considerar: uno es que responde la duda del que pregunta, otra es que manifiesta la respuesta al que no se atrevió a preguntar, otra faz es que responde al que ni siquiera se dio cuenta que también era una duda para él y por último ayuda al profesor a que se dé cuenta qué tema debe desarrollar de otra forma o profundizar de otra manera. Los estudiantes fueron mostrando y descubriendo las falencias de su conocimiento y la interacción del docente y ayudantes en un trabajo resulto ameno, logrando una participación activa.

Para la actividad de la etapa material se utilizó una discusión en pequeños grupos, con colaboración directa del profesor finalizando con una reunión plenaria.

Para comenzar con el tema se hizo una estructuración del contenido conceptual con un enfoque genético de Vigotsky donde la célula generadora es la derivada.

Gráfico N°4: estructuración del contenido conceptual con un enfoque genético de Vigotsky donde la célula generadora es la derivada



Utilizando la discusión heurística se responden a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se define la derivada de una función en un punto a ?
- ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de f en a ?
- ¿Qué significa que en el punto $x = a$ exista un valor crítico?
- ¿Cómo se determina si un extremo es máximo o mínimo?

REGLAS DE DERIVACIÓN

$f'(x) = (K)' = 0, \quad K \in \mathcal{R}$	$[K f(x)]' = K [f(x)]'$
$f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}$	$[f(x)^n]' = n [f(x)]^{n-1} [f(x)]'$
$f'(x) = (x)' = \frac{ x }{x} \text{ con } x \neq 0$	$ f(x) = \frac{ f(x) }{f(x)} D_x f(x), \text{ con } f(x) \neq 0$
$f'(x) = (e^x)' = e^x$	$[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} [f(x)]'$
$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$	$[a^{f(x)}]' = a^{f(x)} \ln a [f(x)]'$
$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} [f(x)]'$
$f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$\operatorname{sen} f(x) = \cos f(x) [f(x)]'$
$f'(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$\cos f(x) = -\operatorname{sen} f(x) D_x [f(x)]$
$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$[\operatorname{tg} f(x)]' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} [f(x)]'$
$f'(x) = (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$[\operatorname{cotg} f(x)]' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 f(x)} [f(x)]'$
$f'(x) = (\operatorname{sen}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\operatorname{sen}^{-1} f(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} [f(x)]'$
$f'(x) = (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\cos^{-1} f(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} [f(x)]'$
$f'(x) = (\operatorname{tg}^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$[\operatorname{tg}^{-1} f(x)]' = \frac{1}{1+[f(x)]^2} [f(x)]'$
$[\operatorname{cotg}^{-1} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$	$[\operatorname{cotg}^{-1} f(x)]' = -\frac{1}{1+[f(x)]^2} [f(x)]'$

ALGEBRA DE DERIVADAS

$[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$
$[f(x) \cdot g(x)]' = [f(x)]' \cdot g(x) + f(x) \cdot [g(x)]'$
$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{[f(x)]' \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(x)]'}{[g(x)]^2}$

Ejemplo N° 1

(Ejercicio 1) a) de la Guía de Trabajos Prácticos: Derivada y sus Aplicaciones) (ver Anexo II)

$$f(x) = x^2 - 5x - 3 \quad \text{en } a = 1 \quad Df(x) = \mathbb{R}$$

Recordar: f es una función polinómica, por lo tanto es **continua en todo su dominio**.

¿Existe $f'(1)$? - Recordando que: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned} \text{con } x_0 = 1 \text{ calcule: } f(1) &= (1)^2 - 5 \cdot (1) - 3 = -7 \\ f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 5(1+h) - 3 - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 5 - 5h - 3 + 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-3 - h)}{h} = -3 \end{aligned}$$

Es decir que **f es derivable en $x = 1$**

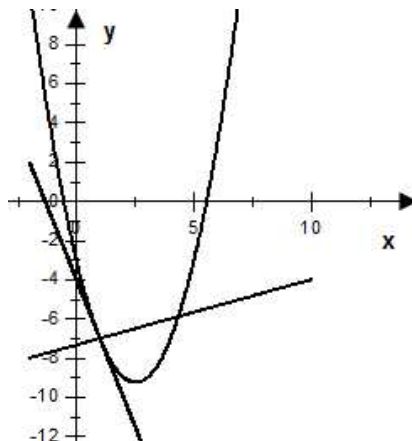
Geométricamente: $f'(1) = -3$ significa que la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función f en el punto $(1; f(1)) = (1; -7)$ es igual a -3 , es decir:

Que aplicando la ecuación de la recta tangente: $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$

Será: $t(x) = f'(1) \cdot (x - 1) - 7 \Rightarrow t(x) = -3x - 4$ y la ecuación de la recta normal:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{queda: } n(x) = \frac{1}{3}(x - 1) - 7 \Rightarrow n(x) = \frac{1}{3}x - \frac{22}{3}$$



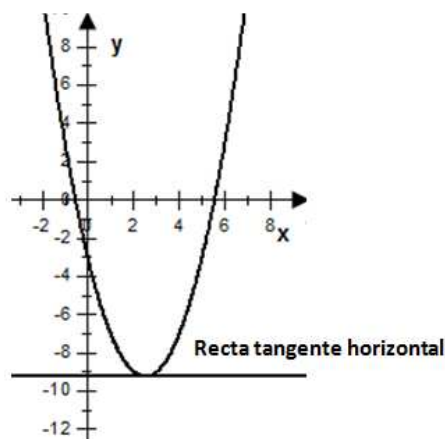
¿Qué sucede en $x = c$ cuando $f'(c) = 0$?

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c+h)^2 - 5(c+h) - 3 - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ch + h - 5}{h} = 2c - 5$$

$$\text{luego } f'(c) = 2c - 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

$$\text{Además } f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{37}{4}$$

Analicemos la ecuación de la recta tangente: $t(x) = f'\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) - \frac{13}{4} = -\frac{13}{4}$ es una recta horizontal.



Indudablemente en $x = c = \frac{5}{2}$ hay un punto en donde se produce un cambio y es un punto crítico.

Utilizando la discusión heurística se desarrolla el Ejemplo N° 2 (problema N° 12 de la Guía de Trabajos Prácticos N° 1)

La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde el comienzo del estudio ($t = 0$). Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas ¿Cuánto son los valores máximo y mínimo? ¿Los intervalos en que esta crece y decrece?

$V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$ luego $V'(t) = 15 - 18t + 3t^2 \Rightarrow$ *igualando a cero obtendremos el o los puntos por donde la recta tangente es horizontal*

$$15 - 18t + 3t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \text{ y } t_2 = 5$$

Interpreta los resultados obtenidos en donde $t_1 = 1$ y $t_2 = 5$ son horas. Luego por algún criterio se determina si es un máximo o un mínimo.

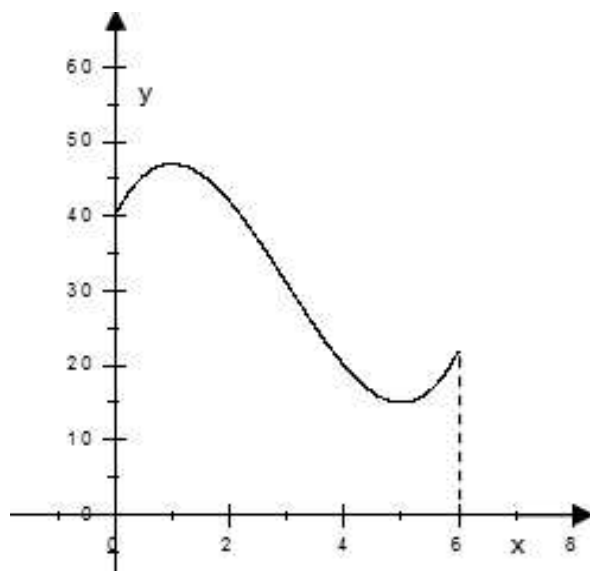
Vamos a utilizar el segundo criterio o criterio de la derivada segunda:

Sea $x = c$ un punto crítico de la función f , el segundo criterio o criterio de la derivada segunda enuncia: Si $f''(c) < 0$ en $x = c$ existe un *mínimo local o relativo*

Análogamente: Si $f''(c) > 0$ en $x = c$ existe un *máximo local o relativo*

$V'(t) = -18 + 6t$ luego $V''(1) < 0 \Rightarrow$ en $t = 1$ existe un máximo local

$V'(t) = -18 + 6t$ luego $V''(5) > 0 \Rightarrow$ en $t = 5$ existe un mínimo local



la máxima virulencia para $t = 1$ hora es $V(1) = 47$

y la mínima para $t = 5$ horas es $V(5) = 15$

3.6.2 Actividad de la etapa materializada – Aplicación de la Derivada

Para comprender mejor el tema se ubicarán los conceptos en la estructuración gráfica de célula generadora.

- ¿Qué sucede en el intervalo (a, b) de $f(x)$ cuando $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$?
 - i. f crece
 - ii. f decrece
 - iii. Tiene un punto de inflexión
- Aplicando la definición de derivada. ¿Cuánto vale la pendiente en $x = 2$? Siendo :
 $f(x) = 4x - x^2$. Justifique.
 - i. 0
 - ii. -4
 - iii. 5

- ¿Es posible calcular de dos maneras diferentes: $f'(1)$ siendo $f(x) = 2x - x^2$.

Fundamente su respuesta

- Sea $f(x) = 8x - 2x^2$, ¿Es posible que en el intervalo $[0,3]$ exista un número $\square$, tal que la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ sea igual a la pendiente de la recta secante que corta a la traza de f en los puntos $(0, f(0))$ y $(3, f(3))$?
- Se quiere cercar un terreno rectangular con 300 m. de tela metálica ¿Cuál es el área máxima que se puede encerrar? y ¿Cuáles sus dimensiones?
- La velocidad (en $\frac{m}{seg}$) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dado en función del espacio recorrido, x , por la siguiente expresión:
 $f(x) = x(x - 180)$ ¿Qué distancia recorrió el atleta cuando alcanza la máxima velocidad?.

3.7 Etapa Verbal - Segunda Etapa

Contenidos conceptuales:

Interpretación geométrica de la derivada, métodos para encontrar extremos y clasificarlos y su aplicación a problemas específicos de situaciones reales

Objetivos específicos

- Resolver e interpretar problemas de aplicación relacionados con temas específicos de la carrera.
- Interpretar gráficamente las soluciones de los problemas.

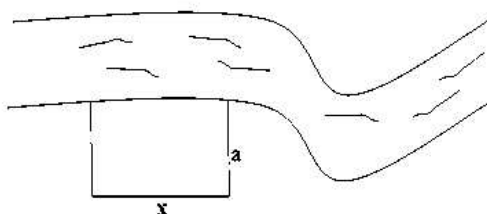
3.7.1 Método en el aula:

Docentes de materias específicas de la carrera dieron primero una clase de un corto tiempo en la cual expusieron lo que en sus asignaturas le conciernen al tema en estudio: Derivada , pero

especialmente Aplicaciones de la misma; otros docentes dieron su aporte en apuntes en donde el contenido estaba adaptado al desarrollo de su clase. Luego, por medio de una discusión heurística, el estudiante recordaba los conceptos estudiados en la etapa material. En esta etapa se resolvieron problemas con discusión en pequeños grupos de estudiantes, con consulta a los docentes encargados y al finalizar una reunión plenaria.

Actividad de la etapa verbal

- 1) El trayecto de un cohete antigranizo responde a la ecuación $s(t) = t - 120t^2$, ¿es posible, que derivando de dos maneras diferentes, encontrar la velocidad máxima que el proyectil alcanza? Justifique su respuesta realizando la grafica correspondiente.
- 2) Se quiere construir un abrevadero para animales que tenga forma de un prisma rectangular y pueda contener 1000 litros de agua. Un lado mide el doble del otro y su altura es de 1 metro. ¿Cuál será la mínima cantidad de material que se utilizará?
- 3) Se quieren bordear un campo rectangular para encerrar un área de 33800 m^2 en el cual uno de sus lados da a un río ¿Cuál es el costo mínimo de alambrado que se puede emplear, sabiendo que el metro lineal cuesta \$700?



- 4) El crecimiento (en gramos) de una planta en x días, de cierta especie comercial el crecimiento responde a la ecuación: $C(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 25$, determine:
 - a) Gráfica.
 - b) Día óptimo para su cosecha.
 - c) Intervalos de tiempo en que la planta crece y en cuál decrece.

d) Dominio de acuerdo al contexto del problema.

3.7 Etapa mental - Tercera etapa

Contenidos conceptuales:

Interpretación geométrica de la derivada, métodos para encontrar extremos y clasificarlos y su aplicación a problemas con mayor dificultad de situaciones específicas de la especialidad.

Objetivos específicos

- Resolver e interpretar gráficamente problemas de mayor complejidad de temas específicos de la carrera con poca o nada de ayuda.

Método en el aula:

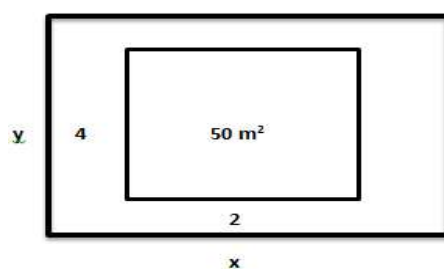
Por medio de una discusión heurística el estudiante recordará los conceptos estudiados en las etapas anteriores utilizando el enfoque sistémico genético.

En ésta etapa se resolverán problemas de mayor complejidad con discusión en pequeños grupos de estudiantes con consulta a los docentes encargados y al finalizar una reunión plenaria.

3.7.1 Actividad de la etapa mental

Esta etapa debe resolver

- 1) Se desea construir un galpón rectangular con un corral de 50 metros cuadrados que tiene una circulación perimetral de 4 metros de ancho en dos lados opuestos y de 2 metros de ancho en los otros dos lados. Calcular las dimensiones del galpón para que su área sea mínima.



2) La cotización, en Bolsa, de la tonelada de grano de una determinada sociedad rural, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días con un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$C(x) = 0,01x^3 - 0,45x^2 + 243x + 300$$

a) Determinar la cotización máxima y mínima, así como los días en donde ocurrieron, en días distintos del primero y del último.

3) Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

4) El análisis de la variación temporal del nitrato contenido en el extracto del estiércol de vaca fresco, tiene una variación que responde aproximadamente a la ecuación cuadrática: $y = 75,95 - 47,50t - 2,37t^2$ con t en días. ¿En qué día será la máxima concentración de nutrientes?. Justifique su respuesta. Grafique y deduzca en el mismo cuál es el dominio dentro del contexto del problema.

Para comprobar el impacto de la aplicación del Sistema de tareas en los estudiantes, se realizaron dos encuestas, una antes de aplicar el Sistema de Tareas y otra después. (Anexo N° VII)

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes tablas:

3.1 ANÁLISIS DE LAS ENCUESTAS

Antes de Aplicado el método

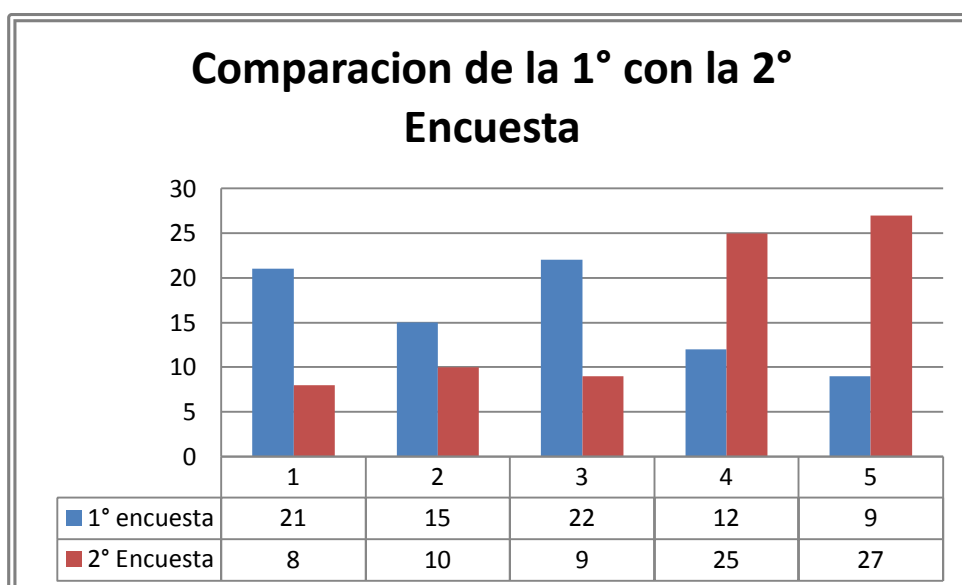
La derivada es útil para resolver problemas cotidianos en la profesión de ingeniero agrónomo		
Alumnos	Respuestas	Porcentaje
a. Totalmente falso	21	27
b. Falso	15	19
c. No tengo opinión	22	28
d. Cierto	12	15
e. Totalmente cierto	9	11
Totales	79	100

Después de Aplicado el método

La derivada es útil para resolver problemas cotidianos en la profesión de ingeniero agrónomo		
Alumnos	Respuestas	Porcentaje
a. Totalmente falso	8	10
b. Falso	10	13
c. No tengo opinión	9	11
d. Cierto	25	32
e. Totalmente cierto	27	34
Totales	79	100

El siguiente gráfico muestra la comparación de los resultados obtenidos en ambas encuestas

Gráfico N°5: Distribución porcentual de 79 estudiantes según las respuestas obtenidas en las encuestas



El significado de los conocimientos que adquieren los estudiantes proviene también del carácter que adoptan las actividades en las que se los produce. Resulta sustancial provocar la reflexión de los estudiantes sobre sus producciones y conocimientos y para ello, la herramienta principal es la organización de actividades de discusión, de confrontación, en

las que hay que comunicar, probar, demostrar, etc., actividades que involucran el trabajo en pequeños grupos, o entre grupos o en la clase total ordenando la participación en función de finalidades bien establecidas y claras para todos. En lo expresado los docentes que dieron de su tiempo para explicarles a los estudiantes la aplicación que tenía la derivada en los diferentes temas expuestos, produjo en el alumnado un apreciable aumento de su interés

En la primera encuesta queda establecido que los estudiantes no han logrado un entendimiento completo del tema ya que no se visualiza su aplicación y destino. Quizás la ausencia de ésta estrategia didáctica utilizada, haya influenciado en que no pudieran fundamentar correctamente o, ni siquiera hayan podido imaginarla y se encuentren también en esta encrucijada. Es por ello que la práctica pedagógica- didáctica, en cualquier caso y para cualquier tema desarrollado en el Análisis, debe de ser abarcativa y dinámica, es decir, tratar de establecer diferentes formas de explicación y articulación para un mismo conocimiento, así la llegada de la transposición didáctica será equitativa.

En la segunda encuesta queda claramente indicado que, una buena cantidad de los mismos, 34 para ser más precisos, llegaron a comprender la importancia de los temas planteados.

CAPITULO IV

El experimento y sus resultados

4. Introducción

Esta investigación pretende diseñar y aplicar un Sistema de Tareas que contenga Modelos Matemáticos que integren contenidos del Análisis Matemático con algunas materias de la carrera de Ingeniería Agronómica.

La hipótesis de investigación implica el estudio de la incidencia de factores que se relacionan con la implementación del Sistema de Tareas y su influencia en la Calidad del proceso de Aprendizaje de los estudiantes de la asignatura Análisis Matemático de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la U.N.S.E.

Se elaboraron y aplicaron diferentes instrumentos de medición para evaluar los indicadores de las acciones de los estudiantes: el Grado de Conciencia o Reflexión y el de Independencia para medir la variable dependiente: Calidad del Proceso de Aprendizaje de los conocimientos de Matemática. Los resultados obtenidos y el análisis e interpretación de los mismos se muestran en éste capítulo.

4.1 El experimento

De acuerdo al problema de investigación planteado y al contexto que rodea al estudio y a las posibilidades institucional se seleccionó, para esta investigación, un diseño tipo cuasiexperimental. Se construyó una situación a la que fueron sometidos los sujetos, se manipuló la variable independiente “Sistema de Tareas basado en las Teorías Psicológicas del Aprendizaje y en el uso de Modelos Matemáticos que se articulen con algunas materias de la especialidad” para analizar la variable dependiente: Calidad del Proceso de Aprendizaje.

El experimento se llevó a cabo en el año 2015 a los 79 (setenta y nueve) estudiantes que cursaban, en ese momento, la asignatura Análisis Matemático perteneciente

al primer año de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de U.N.S.E

Se seleccionó la unidad temática “Derivada y sus Aplicaciones” para ser desarrollada en dos clases teóricas y dos clases prácticas y luego, se solicitó la participación de docentes de asignaturas específicas, quienes desarrollaron Modelos Matemáticos permitiendo motivar e integrar el tema de la clase con algunas materias de la carrera.

El Sistema de Tareas diseñado para tal fin, permitió la participación activa del estudiante y estuvo dirigido a la solución de problemas que interesan al futuro profesional.

Se desarrollaron los ejercicios y problemas en forma gradual, desde los que poseían menor grado de dificultad hasta los de alto grado de dificultad. Se tomó una prueba diagnóstico (pretest) y una prueba de la etapa final (postest) y se hicieron observaciones para analizar la evolución de los aprendizajes.

Los problemas presentados en ambas pruebas, fueron sometidos a juicio de expertos. Para ello, se seleccionó un grupo de experimentados docentes del área Matemática que contribuyeron a validar los instrumentos de evaluación.

4.2 Instrumento de Medición de la Variable Dependiente. Pretest - Postest.

Análisis de los Resultados

De acuerdo con el diseño experimental seleccionado, “Diseño de **un grupo solo con pretest-postest**”, se administró el Pretest al grupo de 79 (setenta y nueve) estudiantes que participaron en la investigación, con el objetivo de medir la Variable Dependiente. Luego de finalizada la experiencia, se aplicó el Postest y posteriormente se realizó la comparación correspondiente con los resultados obtenidos para esta misma variable.

Las pruebas constaron de cuatro ejercicios pertinentes a la unidad temática “Derivada y sus Aplicaciones”, que fue con el que se trabajó en el tratamiento experimental (ver Anexos V y VI).

En las pruebas se midieron las siguientes características: Grado de Independencia y Grado de Conciencia o Reflexión. En cada una de las mediciones se establecieron niveles que permitieron valorar las respuestas de los estudiantes. Cabe aclarar que éstas formas de controlar las cualidades de la acción han sido utilizadas y validadas en diferentes trabajos de investigación en educación matemática

4.3 Dimensiones, Indicadores y medidas de la Variable dependiente

Dimensión 1: “Grado de Conciencia o Reflexión”.

El **Grado de Reflexión o Conciencia** está determinado por la posibilidad de fundamentar los pasos seguidos en la resolución de los ejercicios.

Se consideraron las siguientes categorías para medir la variable Grado de Reflexión:

Muy Alto: Si el estudiante es capaz de fundamentar entre el 80% y el 100% de los ejercicios (incluido el 80% y el 100%).

Alto: Si es capaz de fundamentar entre el 60% el 80% de los ejercicios (incluido el 60%).

Medio: Cuando el estudiante es capaz de fundamentar entre el 40% y el 60% de los ejercicios (incluido el 40%).

Bajo: Cuando es capaz de fundamentar entre el 20% y el 40% de los ejercicios (incluido el 20%).

Muy Bajo: cuando el estudiante es capaz de fundamentar menos del 20% de los ejercicios.

Los ejercicios N° 1 y 2 del Pretest y Postest (ver Anexos V y VI), fueron utilizados para medir el Grado de Conciencia o Reflexión. Para ello, se determinó el número total “N” de fundamentos que el estudiante debía considerar para resolver correctamente los dos

ejercicios y “n” el número de fundamentos correctos considerados por él. Se utilizó “x” como el siguiente indicador empírico:

$$x = \frac{\text{número de fundamentos considerados correctamente}}{\text{número fundamentos totales}}, \text{ siendo } 0 \leq x \leq 1$$

Tabla N°1: Indicadores que permitieron medir la variable Grado de Conciencia o Reflexión

Medida	Indicador $x = n/N$
Muy Bajo	$0 \leq x < 0,2$
Bajo	$0,2 \leq x < 0,4$
Medio	$0,4 \leq x < 0,6$
Alto	$0,6 \leq x < 0,8$
Muy Alto	$0,8 \leq x \leq 1$

Fuente: Elaboración propia

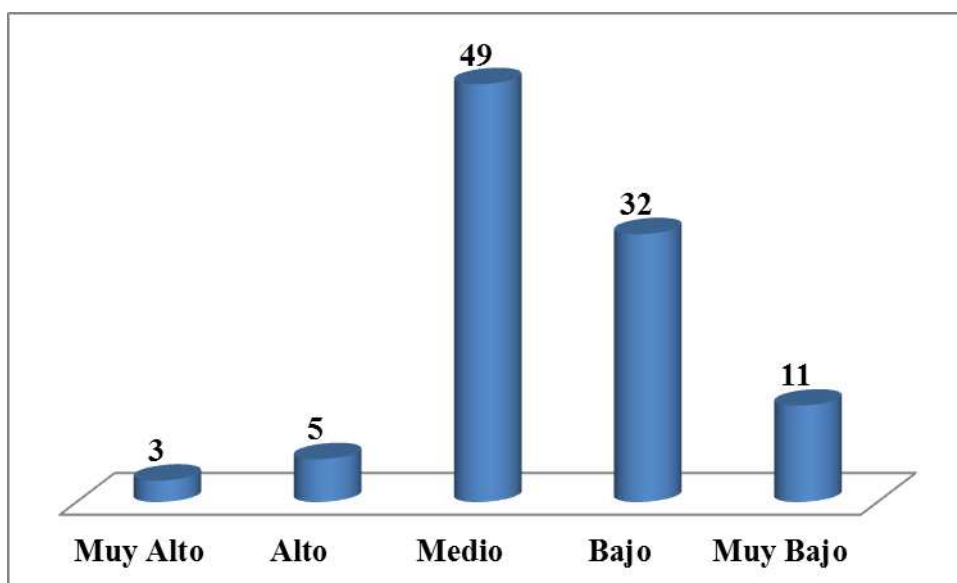
Del análisis de los resultados del Pretest y considerando los criterios nombrados anteriormente, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla N° 2 para el Grado de Conciencia:

Tabla N°2 Distribución de frecuencias de la variable Grado de Conciencia o Reflexión en el Pretest. Análisis Matemático. Año 2015

Indicador $x = n/N$	Medida	N° de Alumnos	% de Alumnos
$0,8 \leq x \leq 1$	Muy Alto	2	3
$0,6 \leq x < 0,8$	Alto	4	5
$0,4 \leq x < 0,6$	Medio	39	49
$0,2 \leq x < 0,4$	Bajo	25	32
$0 \leq x \leq 0,2$	Muy Bajo	9	11
		79	100

El siguiente diagrama de barras permite visualizar mejor la distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Conciencia para así establecer comparaciones:

Gráfico N°1: Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Conciencia o Reflexión en el Pretest. Análisis Matemático. Año 2015



La clase modal de la variable Grado de Conciencia o Reflexión en el Pretest es la categoría Medio. Además, se destaca que menos del 10% de los estudiantes se encuentra en las categorías Muy Alto y Alto.

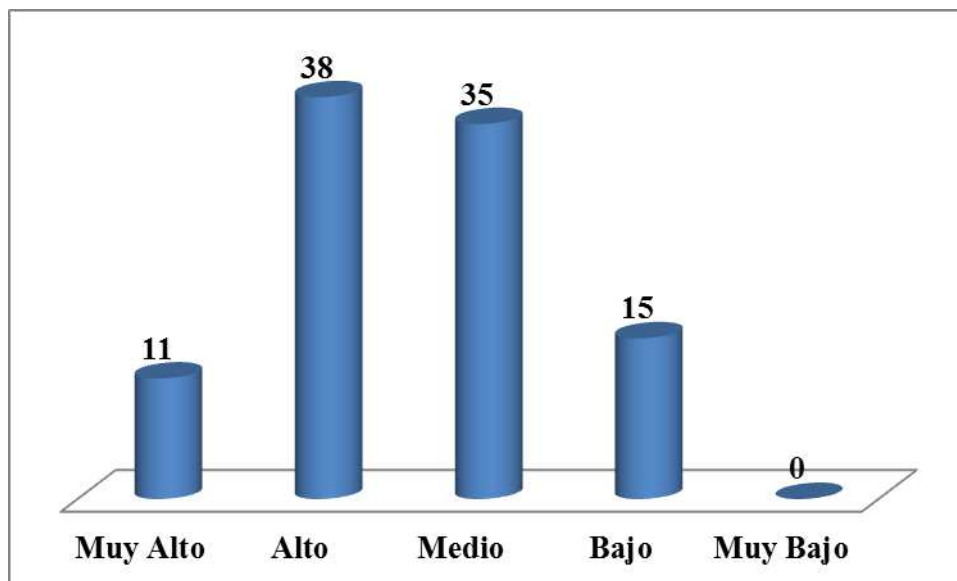
A continuación se muestran en la Tabla N°3, los resultados obtenidos al realizar el análisis del Postest para la variable Grado de Conciencia o Reflexión.

Tabla N°3 Distribución de frecuencias de la variable Grado de Conciencia o Reflexión en el Postest. Análisis Matemático. Año 2015

Indicador $x = n/N$	Medida	N° de Alumnos	% de Alumnos
$0,8 \leq x \leq 1$	Muy Alto	9	11
$0,6 \leq x < 0,8$	Alto	30	38
$0,4 \leq x < 0,6$	Medio	28	35
$0,2 \leq x < 0,4$	Bajo	12	15
$0 \leq x \leq 0,2$	Muy Bajo	0	0
		79	100

El Gráfico N°2 muestra claramente los resultados obtenidos en el postest

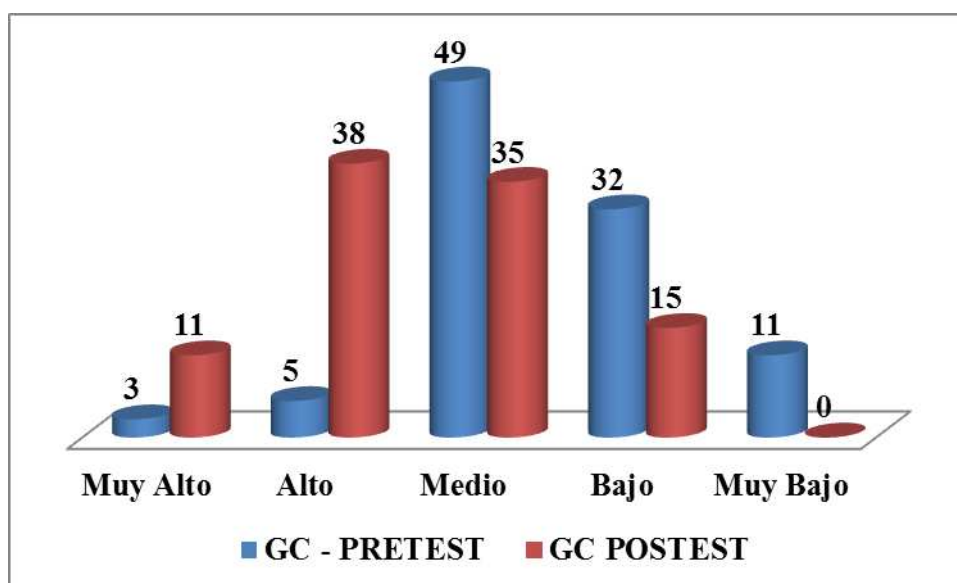
Gráfico N° 2: Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Conciencia o Reflexión en el Postest. Análisis Matemático. Año 2015



La clase modal de la variable Grado de Conciencia o Reflexión en el Postest, es la categoría Alto. Se observa claramente que sólo el 15% de los estudiantes se encuentra en la categoría Bajo.

El siguiente diagrama de barras permite comparar los resultados obtenidos en ambas pruebas para la variable Grado de Conciencia o Reflexión

Gráfico N° 3: Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Conciencia o Reflexión según los resultados obtenidos en el Pretest y el Postest. Análisis Matemático. Año 2015.



Se presenta un considerable incremento en los porcentajes de estudiantes en las categorías Alto y Muy Alto del Postest.

Dimensión 2: “Grado de Independencia”

El **Grado de Independencia** está determinado por los niveles de ayuda que requieren los estudiantes en la ejecución de las tareas propuestas.

Se consideraron las siguientes categorías para medir la variable Grado de Independencia:

Muy Alto: Si resuelve adecuadamente y sin ayuda entre el 80% y el 100% de los ejercicios (incluido el 80% y el 100%).

Alto: Si resuelve adecuadamente y sin ayuda entre el 60% el 80% de los ejercicios (incluido el 60%).

Medio: Cuando sin ayuda, resuelve adecuadamente entre el 40% y el 60% de los ejercicios (incluido el 40%).

Bajo: Cuando sin ayuda, resuelve adecuadamente entre el 20% y el 40% de los ejercicios (incluido el 20%).

Muy Bajo: Cuando resuelve adecuadamente y sin ayuda menos del 20% de los ejercicios.

Al final del proceso es necesario conocer **cuánto** es capaz de resolver el estudiante sin ayuda. Por ello, para medir esta variable se utilizó la totalidad de los ejercicios.

Para medir el Grado de Independencia se consideró como indicador empírico el siguiente:

$$x = \frac{n}{N} = \frac{\text{número de acciones efectuadas correctamente y sin ayuda}}{\text{número total de acciones}}, \text{ siendo } 0 \leq x \leq 1$$

A continuación se pueden observar en la Tabla N°4 los indicadores que permitieron medir el Grado de Independencia:

Tabla N° 4: Indicadores que permitieron medir el Grado de Independencia

Medida	Indicador $x = n/N$
Muy Bajo	$0 \leq x < 0,2$
Bajo	$0,2 \leq x < 0,4$
Medio	$0,4 \leq x < 0,6$
Alto	$0,6 \leq x < 0,8$
Muy Alto	$0,8 \leq x \leq 1$

Fuente: Elaboración propia

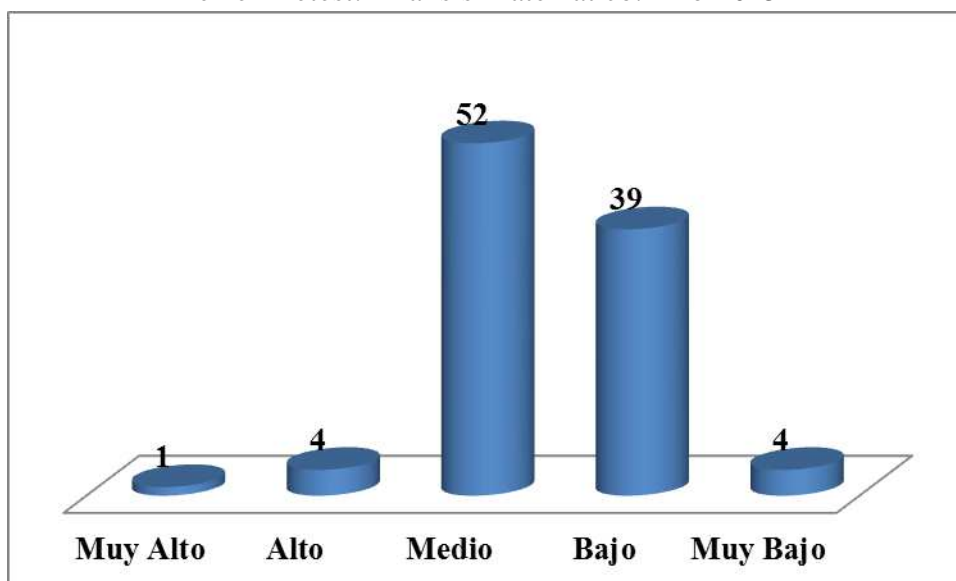
Se muestra en la Tabla N°5 los resultados obtenidos al realizar el análisis del Pretest para la variable. Grado de Independencia.

Tabla N°5: Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Independencia en el Pretest. Análisis Matemático. Año 2015

Indicador $x = n/N$	Medida	N° de Alumnos	% de Alumnos
$0,8 \leq x \leq 1$	Muy Alto	1	1
$0,6 \leq x < 0,8$	Alto	3	4
$0,4 \leq x < 0,6$	Medio	41	52
$0,2 \leq x < 0,4$	Bajo	31	39
$0 \leq x \leq 0,2$	Muy Bajo	3	4
		79	100

El Gráfico N°4 permite observar claramente los resultados obtenidos en el pretest para la variable Grado de Independencia

Gráfico N° 4: Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Independencia en el Pretest. Análisis Matemático. Año 2015



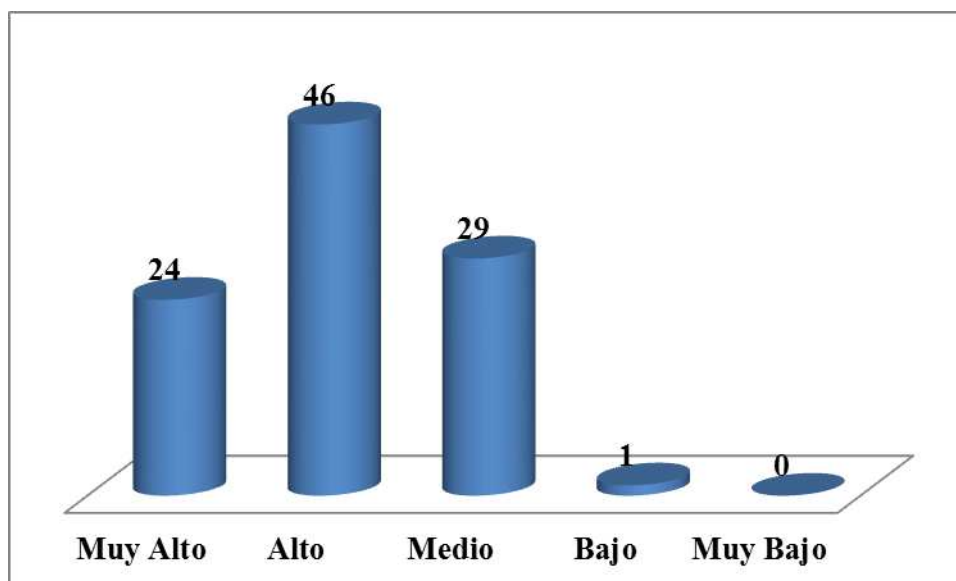
Se observa que la mayor frecuencia se presenta en las categorías Medio y Bajo del Grado de Independencia.

En la Tabla N°6 y en el Gráfico N°5 se muestran los resultados obtenidos al analizar el Grado de independencia correspondiente al Postest que se aplicó a los estudiantes luego de concluida la experiencia.

Tabla N°6: Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Independencia en el Postest. Análisis Matemático. Año 2015

Indicador $x = n/N$	Medida	N° de Alumnos	% de Alumnos
$0,8 \leq x \leq 1$	Muy Alto	19	24
$0,6 \leq x < 0,8$	Alto	36	46
$0,4 \leq x < 0,6$	Medio	23	29
$0,2 \leq x < 0,4$	Bajo	1	1
$0 \leq x \leq 0,2$	Muy Bajo	0	0
		79	100

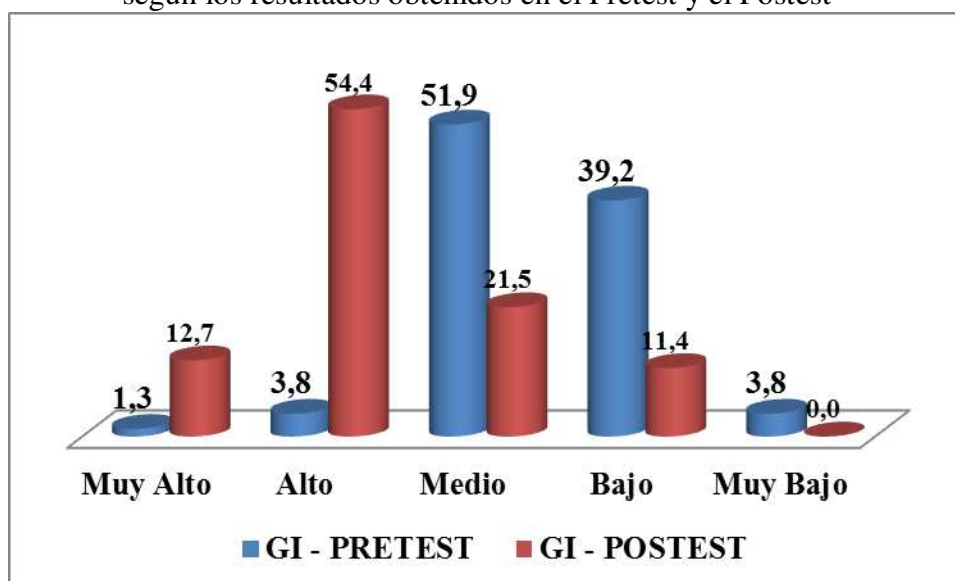
Gráfico N° 5: Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Independencia en el Postest. Análisis Matemático. Año 2015



La clase modal de la variable: Grado de Independencia es la categoría Alto para el Postest. Sólo un 1% del grupo que recibió el tratamiento se encuentra en la categoría Bajo.

El siguiente diagrama de barras (Ver Gráfico N° 6) permite visualizar mejor la distribución de frecuencias en porcentaje de la variable: Grado de Independencia en ambas pruebas, para así establecer comparaciones:

Gráfico N°6 : Distribución porcentual de frecuencias de la variable Grado de Independencia según los resultados obtenidos en el Pretest y el Postest



Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Año 2015

En un primer análisis descriptivo realizado en el apartado anterior, los resultados indicaban que las variables consideradas: “Grado de Reflexión o Conciencia” y “Grado de Independencia”, se distribuían de manera muy diferente en cada una de las pruebas consideradas (Pretest y Postest).

A continuación se muestra el análisis confirmatorio de los datos descriptos en las Tablas N°4 y 8 que se realizaron para cada variable.

Se aplicaron pruebas no paramétricas para muestras pareadas y dependientes para cada una de las variables consideradas.

Estos contrastes permitieron comprobar si hay, o no, diferencias entre las distribuciones de dos poblaciones a partir de dos muestras dependientes o relacionadas; es decir, tales que cada elemento de una muestra está emparejado con un elemento de la otra, de tal forma que los componentes de cada pareja se parezcan entre sí lo más posible por lo que hace referencia a un conjunto de características que se consideran relevantes.

Los estadísticos descriptivos correspondientes a las variable “Grado de Conciencia en el Pretest y el Postest se presentan en la Tabla N°9. Se observa que la media aritmética en el Postest es mayor a la del Pretest, igual observación cabe realizar respecto de la mediana (punto medio de la distribución) de la variable bajo estudio.

Tabla N°9: Estadísticos descriptivos de las variables Grado de Conciencia en el Pretest Postest

Variable	Número de casos(N)	Media	Mínimo	Cuartil Q1	Mediana	Cuartil Q3	Máximo
GC Pretest	79	0,35	0,00	0,25	0,37	0,50	0.90
GC Postest	79	0,61	0,30	0,50	0,50	0,75	1,00

Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustria de la UNSE. Año 2015

La mediana (punto medio de la distribución) en el Pretest es de 0.37 y va en aumento en la prueba siguiente, lo que indica que a través de las pruebas, aumentó el porcentaje de fundamentaciones correctas.

El valor mínimo en la primera prueba (Pretest), aumenta en la etapa final, lo que indica que hay estudiantes que no justificaban las afirmaciones planteadas y que al final logran hacerlo. Los valores máximos indican que durante la aplicación del Sistema de Tareas siempre hay estudiantes que realizan todas las actividades (indicado por el valor máximo).

Estos resultados indican que la metodología implementada ha generado una mejora en el Grado de Conciencia de los estudiantes en relación a la ejercitación propuesta para la evaluación. Sin embargo, para afirmar este resultado con mayor rigor estadístico, se procede a aplicar una prueba de hipótesis no paramétrica en razón que las observaciones bajo estudio no son independientes y no tienen distribución normal (Véase Gráfico N°7).

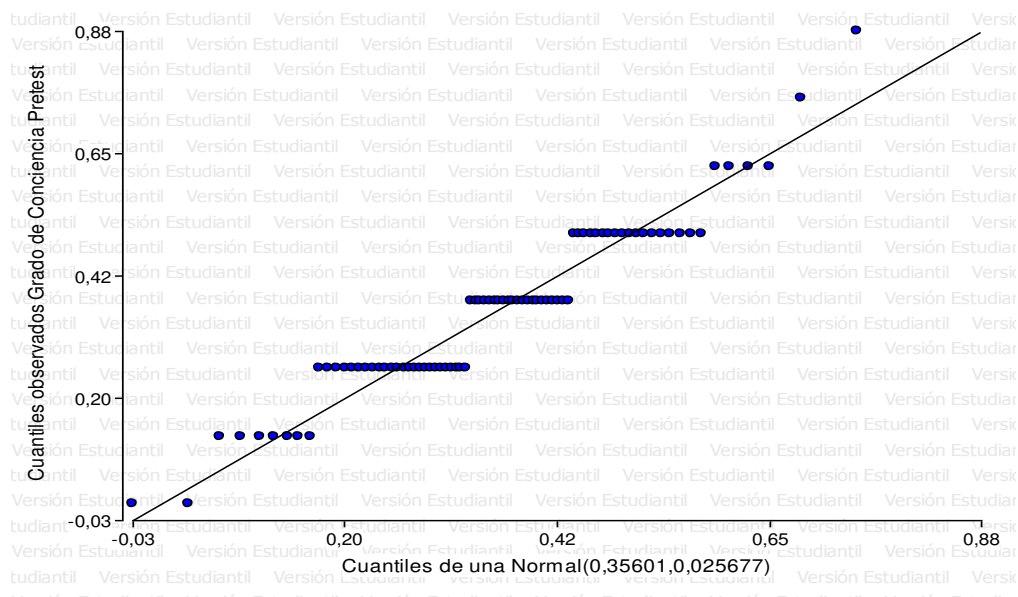
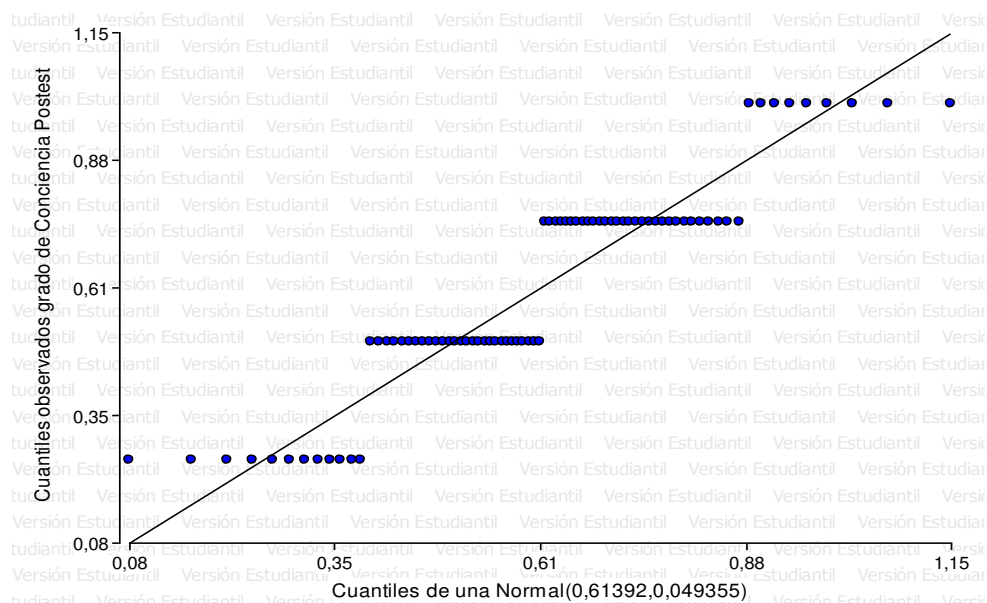


Gráfico N°7: Gráfico QQ-Plot correspondiente al grado de conciencia pretest y posttest



Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Año 2015

En el Gráfico N°7 se observa que los datos no se encuentran concentrados alrededor de la primera bisectriz, por lo que no es razonable suponer que provienen de una distribución normal.

La prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para datos pareados indica, con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, que existe diferencia entre los Grados de Conciencia de los estudiantes, por lo cual se rechaza la hipótesis nula de igualdad de grados de conciencia (Véase Tabla N°10).

Tabla N°10: Prueba No Paramétrica de Wilcoxon de rangos con signo

		N	Rango Promedio	Suma de Rangos
Indicador GC POSTEST - Indicador GC PRETEST	Rangos Negativos	1 ^a	9,50	9,50
	Rangos Positivos	68 ^b	35,38	2405,50
	Empates	10 ^c		
	Total	79		

a: Indicador GCPOSTEST < Indicador GCPRETEST

b: Indicador GCPOSTEST > Indicador GCPRETEST

c: Indicador GCPOSTEST = Indicador GCPRETEST

Z: -7,229 - Sig. asintótica (bilateral): 0,000

Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Año 2015

En este mismo sentido, a partir de la prueba No Paramétrica de los Signos para observaciones pareadas, se observa que el número de diferencias positivas es considerablemente mayor al de diferencias negativas, por lo cual se rechaza con un nivel de significación $\alpha = 0.05$ la hipótesis nula de igualdad de los Grados de Conciencia promedios, antes y después de la metodología aplicada. La diferencia es a favor del Postest (Véase Tabla N°11).

Tabla N°11: Prueba No Paramétrica de los Signos

		N
Indicador GCPRETEST - Indicador GCPOSTEST	Diferencias negativas ^a	1
	Diferencias positivas ^b	68
	Empates ^c	10
	Total	79

a: Indicador GCPOSTEST < Indicador GCPRETEST

b: Indicador GCPOSTEST > Indicador GCPRETEST

c: Indicador GCPOSTEST = Indicador GCPRETEST

Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Año 2015

La lectura conjunta de los resultados anteriores permite concluir que la metodología implementada ha producido un mejoramiento en el Grado de Conciencia de los estudiantes evaluados en la presente investigación.

A continuación se muestra un análisis similar para la variable Grado de Independencia. Las medidas descriptivas, se muestran en la Tabla N°12.

Tabla N°12: Estadísticos descriptivos de las variables Grado de Independencia en el Pretest Postest

Variable	Número de casos(N)	Media	Mínimo	Cuartil Q1	Mediana	Cuartil Q3	Máximo
GI Pretest	79	0,37	0,10	0,29	0,35	0,41	0,80
GI Postest	79	0,62	0,30	0,47	0,64	0,70	0,90

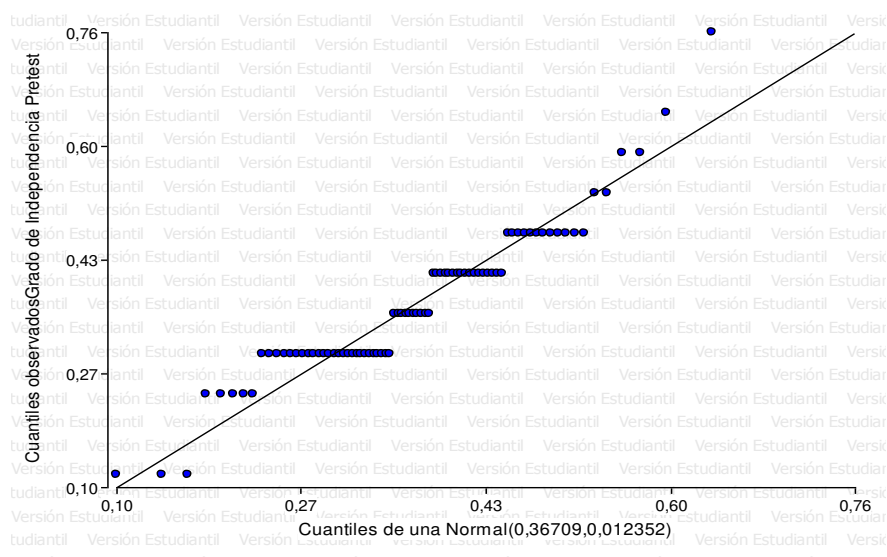
Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustria de la UNSE. Año 2015

Se observa que los valores de la media aumentan desde el Pretest a la prueba final (Postest).

El aumento de la mediana entre ambas pruebas indica que el grupo de estudiantes mejoró realizando mayor cantidad de actividades propuestas sin ayuda.

Además, se observa que el 75% de los estudiantes logró realizar más del 47% (Cuartil Q1. Variable GI Postest) de los ejercicios propuestos en el Postest sin ayuda, lo que indica que el grupo mejoró su grado de independencia para la realización de las actividades, respecto del Pretest.

Estos resultados muestran que la metodología implementada ha generado una mejora en el Grado de Independencia de los estudiantes en relación a la ejercitación propuesta para el Postest. Sin embargo, para afirmar este resultado con mayor rigor estadístico, se procede a aplicar, como en el caso anterior, una prueba de Hipótesis no paramétrica en razón de la falta de normalidad e independencia de las observaciones.



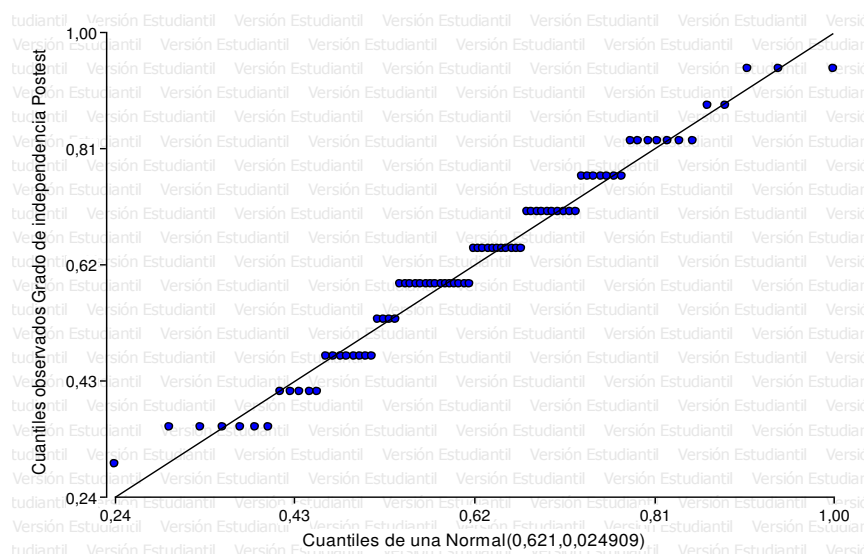


Gráfico N°8: Gráfico QQ-Plot correspondiente al grado de conciencia pretest y posttest

Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Año 2015

En el Gráfico N°8, se observa que los datos no se encuentran concentrados alrededor de la primera bisectriz, por lo que no es razonable suponer que provienen de una distribución normal.

La prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para datos pareados indica, con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, que existe diferencia entre los Grados de Independencia de los estudiantes, por lo cual se rechaza la hipótesis nula de igualdad de Grados de Independencia (Véase Tabla N°13).

Tabla N°13: Prueba No Paramétrica de Wilcoxon de rangos con signo

		N	Rango Promedio	Suma de Rangos
Indicador GI POSTEST - Indicador GI PRETEST	Rangos Negativos	2 ^a	4,00	8,00
	Rangos Positivos	74 ^b	39,43	2918,00
	Empates	3 ^c		
	Total	79		

a: Indicador GCPOSTEST < Indicador GCPRETEST

b: Indicador GCPOSTEST > Indicador GCPRETEST

c: Indicador GCPOSTEST = Indicador GCPRETEST

Z: -7,551^b - Sig. Asintótica (bilateral): 0,000

Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Año 2015

Nuevamente, a partir de la prueba No Paramétrica de los Signos para observaciones pareadas, se observa que el número de diferencias positivas es considerablemente mayor al de diferencias negativas, por lo cual se rechaza con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula de igualdad de los Grados de Independencia promedios antes y después de la metodología aplicada. La diferencia es a favor del Postest (Véase Tabla N°14).

Tabla N°14: Prueba No Paramétrica de los Signos

		N
Indicador GIPOSTEST - Indicador GIPRETEST	Diferencias negativas ^a	2
	Diferencias positivas ^b	74
	Empates ^c	3
	Total	79

a: Indicador GIPOSTEST < Indicador GIPRETEST

b: Indicador GIPOSTEST > Indicador GIPRETEST

c: Indicador GIPOSTEST = Indicador GIPRETEST

Fuente: Cátedra de Análisis Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Año 2015

La lectura conjunta de los resultados anteriores permite concluir que la metodología implementada también ha producido una mejora en el Grado de Independencia de los estudiantes evaluados en la presente investigación.

4.4 Confiabilidad y Validez de los Instrumentos de Medición

Todo instrumento de recolección de datos debe reunir dos requisitos esenciales: confiabilidad y validez.

En las pruebas en las distintas etapas, se garantizó la “validez de contenido” sometiéndola a juicios de **jueces expertos** en el tema, los que comprobaron que los problemas presentados respondían a los objetivos de las pruebas.

Los expertos se seleccionaron de acuerdo a la experiencia docente, capacidad de análisis crítico y vínculo con la enseñanza del Análisis Matemático como especialidad. Se eligieron tres jueces, docentes universitarios de Matemática y sus observaciones fueron consideradas para la aplicación de las pruebas.

El marco teórico que se presentó en ésta tesis avaló la construcción del Sistema de Tareas, lo que brindó la “validez de construcción” del instrumento.

La “validez de criterio” se verificó cuando se contribuyó a elevar el nivel de la Calidad del Proceso de Aprendizaje. Esto último se comprobó con las pruebas aplicadas, obteniendo mejores resultados con respecto a los grados de Independencia y de Conciencia o Reflexión.

Se consideró la confiabilidad de las mediciones de las pruebas calificándolas varias veces después de un periodo de tiempo. Hubo poca variabilidad ya que no se modificaron los criterios y resultados entre las observaciones.

CONCLUSIONES

Las conclusiones que se alcanzaron en éste trabajo permitieron afirmar que se ha alcanzado el objetivo de esta investigación, lo que alienta a seguir trabajando, perfeccionando la propuesta y aplicándola en los otros temas de la asignatura.

Los resultados obtenidos podrían mejorarse si fuera posible implementar la propuesta con una mayor participación de alumnos, ya que en esta experiencia que podría considerarse un pilotaje, la participación del estudiante estuvo limitada por la escasez de horas clase, debido a una norma de la Facultad.

La experiencia realizada en este estudio, que se llevó a cabo con los alumnos de Análisis Matemático en el año 2016, enriqueció tanto a los estudiantes que participaron con el desarrollo del Sistema de Tareas, y interactuaron con los docentes que intervinieron en la implementación de las clases.

Resulta posible pensar que actividades como las propuestas se pueden aplicar en otras asignaturas de la carrera en las cuales sea posible hacerlo y porque no pensar en otras asignaturas de diferentes.

El diseño metodológico resultó satisfactorio para cubrir los objetivos de este trabajo teniendo en cuenta las limitaciones del contexto de investigación.

La información de las fuentes utilizadas (examen parcial, encuesta, observación) permitió analizar otras dimensiones de la variable respuesta no consideradas al comenzar este

estudio, cuyos resultados contribuyeron a corroborar la Hipótesis de Investigación. Estas dimensiones se corresponden con los criterios derivados del marco teórico.

Dadas las limitaciones institucionales, este estudio de investigación no pudo extenderse en un período largo de tiempo, se analizaron los cambios de la variable Calidad del Aprendizaje solamente en dos puntos diferentes en el tiempo, con un mismo grupo de estudiantes, obteniéndose resultados que estimulan a ampliar el alcance del estudio ya que a lo largo de este trabajo han quedado abiertas cuestiones a abordar en el futuro que originan nuevas líneas de investigación:

- Ahondar en lo que significa el Entorno Socio Cultural en el desarrollo del conocimiento del estudiante.
- Utilizar la empatía como una herramienta útil para que el estudiante aprehenda el conocimiento con una mayor predisposición tanto mental como actitudinal.
- Profundizar el estudio de los errores y las dificultades en el aprendizaje de la Derivada y sus Aplicaciones para establecer comparaciones con las dificultades que tuvieron los investigadores durante el desarrollo del conocimiento del tema, en la construcción de estos conceptos, a lo largo de la historia y, así, lograr una mejor comprensión de estos errores y dificultades para generar nuevas y mejores propuestas.
- Diseñar una estrategia de evaluación de los aprendizajes con el objetivo de determinar el grado en que los alumnos desarrollaron competencias de control.

–

BIBLIOGRAFÍA

- **Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. & Schwingendorf, K.** (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior* pp. 399–431.
- **Azcárate, C.** (1990). “La velocidad: introducción al concepto de derivada”. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.
- **Ausubel-Novak-Hanesian** (1983) “Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo .2° Ed. TRILLAS México
- **Amit, M. & Vinner, S.** (1990). Algunos errores en el cálculo - Anécdotas y la punta del un iceberg. En G. Booger, P. Cobb, y T. Mendicuti (Eds). *Actas de la 14^{ava} Conferencia anual del Grupo Internacional para la Psicología La educación de las Matemáticas*. México.
- **Aspinwall, Shaw y Presmeg** (1997). “Dificultad de los estudiantes universitarios para la identificación de funciones”. La investigación presentada en este trabajo fue financiado por la Universidad de Atenas. Parte del estudio se llevó a cabo durante el año académico 2000 – 2001, cuando el primer autor fue profesor visitante en el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Chipre
- **Azcárate C., y otros:** (1996). “Cálculo Diferencial e Integral”. Madrid: Síntesis.
- **Azcárate C., García L., y Moreno, M.** (2006). “Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. 9, (1). pp. 85-116.
- **Baker, B.; Cooley, L. & Trigueros, M.** (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 557–578.

- **Clark, J. M.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; DeVries, D. J.; St. John, D.; Tolias, G. & Vidakovic, D.** (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior* , pp. 345–364.
- **Delors, J.** (1997) “La educación encierra un tesoro. Informe de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI”. Ediciones UNESCO, impreso en México.
- **Deming, E.** (1982) “Salir de la crisis”. Centro de Estudios avanzados de ingeniería. MITICAES.
- **Díaz, J.** (1997) Estrategias de ensino-aprendizagem, Ed. VOZES. Brasil.
- **Duval, R.** (1983). L’obstacle de dedoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*. 14, 385 – 414.
- **Ferrini-Mundy, J. & Graham, K.** (1994). La investigación en el cálculo de aprendizaje: Comprensión de límites, derivadas e integrales. Temas de Investigación en Matemáticas cursos de aprendizaje: Los análisis preliminares y resultados. Notas MAA Número 33. Asociación Matemática de América.
- **Font, V.** (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada. Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona.
- **Galperin, P.** (1959), desarrollo de la investigación de las acciones mentales. En la colección: Ciencia Psicológicas de la URSS. TIM. Academia de Ciencias Pedagógicas de la RSFSR.
- **Galperin, P.** (1976). Introducción a la Psicología, un Enfoque Dialéctico. España: Pablo del Río.

- **Galperin, P.** (2001) Acerca del lenguaje interno, en Quintanar (compilador) La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño. México: Universidad Autónoma de Tlaxcala.
- **Gardner, Howard** (1998), inteligencias múltiples: la teoría en la práctica. Ed. Paidós ibérica. Barcelona.
- **Gascón, J.** (1998) Evolución de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18
- **González, O.** (1994) “Didáctica Universitaria”, Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior, Ed. Universidad de la Habana, La Habana.
- **González, O.** (1995) “Aprendizaje e Instrucción”, Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior, Ed. Universidad de la Habana, La Habana.
- **González, O.** (1996) “El enfoque histórico cultural como fundamentación de una concepción pedagógica”, en Tendencias Pedagógicas Contemporáneas, Ed. El Póirais Editores e Impresores, Ibagué, Colombia
- **Gonzalez, M. J.** (1997): Aprendizaje por analogía. Análisis del proceso de Inferencia Analógica para la adquisición de nuevos conocimientos. Madrid: Editorial Trotta.
- **Hernández-Sampieri, r., Fernández-Collado, c., Baptista-lucio, P.** (2006) Metodología de la investigación. México, Mc-Graw Hill Interamericana. 4ta Edición, 2006.
- **Hurtado, I. y Toro, G.** (2001). Paradigmas y Métodos de Investigación en Tiempos de Cambio (4ta ed); Episteme; Valencia-Venezuela.
- **Leontiev A. N.:** Actividad, Conciencia, Personalidad. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1981.

- **McMillan, J. y Schumacher, S.**, Investigación Educativa, Madrid: Pearson Educación, 2005.
- **Nieves, Z. y otros.** (2001). Aprendizaje desde el enfoque histórico-cultural. Registro Público Nacional, No. 3-09-21. Centro de perfeccionamiento de investigaciones pedagógicas de Chile. Santiago de Chile. p45.
- **Ojalvo, V.** (1999) “Comunicación educativa”, CEPES, Universidad de la Habana. La Habana.
- **Orton, A.** (1983). “Students’ understanding of differentiation”. Educational Studies in Mathematics
- **Otero, I.** (2002). El sujeto psicológico en las estrategias metarreflexivas. Material inédito.
- **Pérez Pantaleón, G.** (2009). La Enseñanza y el Aprendizaje de la Formulación y Resolución de Problemas Matemáticos, Tucumán, Argentina: FAU-UNT.
- **Piaget, J** (1975) “La asimilación sensorio motriz y el nacimiento de la inteligencia”. Psicología de la inteligencia. Buenos Aires, Psique.
- **Pimm, D.** (1987). Matemáticamente hablando. Londres, Routledge and Kegan Paul Ltd.
- **Polya, G.** (1965). “Cómo plantear y resolver problemas”, México: Trillas.
- **Pozo J.I.** (2006) – “Teorías Cognitivas Del Aprendizaje”, España. Editorial MORATA.
- **Ramírez Rincón, Eliseo** (2009) Tecné, Episteme y Didaxis: TEΔ No. Extraordinario, 4º Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias (ponencia)
- **Reyes, A.** (1999) “Técnicas y modelos de calidad en el salón de clases”, Ed. Trillas, México.

- **Santos, T., L. M.** (2007), “La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos”, México, Trillas.
- **Slavit, D.** (1997), An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics*. 33, 259-281.
- **Schneider, M.** (1992). A propos del l'apprentissage du taux de variation instantane. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 317-350.
- **Selden J, Selden A. y Mason** (1994) Even good Calculus students can't solve nonroutine problems Ed. I. J Kaput & E. Dubinsky. “Research issues in undergraduates mathematics learning”. (pp. 19 – 26) “Mathematics Association of América”.
- **Selltiz, Claire, Wrightsman, Lawrence S. , Stuart W. Cook** (1980). Ed. Rialp.
Métodos de investigación en las relaciones sociales
- **Sierpiska, A.** (1992). “Comprensión de la noción de función”. Ed. G. Harel y Dubinsky E. El concepto de función. Los aspectos de la Epistemología y Pedagogía (pp 25-58) EE.UU.: Asociación Matemática de América.
- **Talizina, N.F.** (1987) la formación de la actividad cognoscitiva en los escolares DEPEs Universidad de la Habana.
- **Tall, D.** (1992). Current difficulties in the teaching of mathematical analysis at university: an essay review of «Yet another in introduction to analysis». *ZDM*, pp. 37-42.
- **Tristá, B.** (1985) “Dirección en los centros de educación superior”, Ed. MES, La Habana.
- **Tristá, B.** (1985) “Dirección en los centros de educación superior”, Ed. MES, La Habana.

- **Thompson, P.W.** (1994) “Imágenes de la razón de cambio del Teorema Fundamental del Cálculo”. *Ciencias de la Educación en Matemáticas*. 25(3), pp. 279-303.
- **Vigotski L. S.** 1989. *Obras Completas (6 T)* Editorial Pueblo y Educación.
- **Vigotski L. S.** 1981. *Pensamiento y lenguaje*. La Habana, Edición Revolucionaria.
- **Vigotsky, L.** (1982) “Pensamiento y Lenguaje”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.
- **Vigotski, L.S.** (1987). *Psicología evolutiva y pedagógica en la URSS*. Moscú. Ed. Progreso.
- **Talizina, N.F.** (1988) “Psicología de la enseñanza”, Ed. Progreso, Moscú.
- **Vigotsky, L. S.** (1968) *Pensamiento y Lenguaje*. Edición Revolucionaria. La Habana. p118.
- **Vigotsky, L. S.** (1987): *Historia del desarrollo de las Funciones Psíquicas Superiores*, Ed. Científico Técnica, Ciudad de la Habana, Cuba.
- **Vinner S.** (1989). El evitar consideraciones visuales en el cálculo. Enfoque de aprendizaje. *Problemas de Matemáticas. Antología de Educación Matemática*. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- **Von Glassersfeld, E.** (1995), "La construcción del conocimiento", en Fried Schnitman, Dora (ed.), *Nuevos paradigmas, cultura y subjetividad*. México: Paidós, pp. 115–141.

RECOMENDACIONES

Extender la implementación del Sistema de Tareas a todas las unidades temáticas de la asignatura Análisis Matemático.

Propiciar la aplicación de la propuesta a otras asignaturas de las carreras de Ingeniería.

Proponer como objetivo de la asignatura, el desarrollo de estrategias de articulación con asignaturas específicas, como propuesta metodológica en los planes de estudio.

Hacerlo extensivo a otras carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Presentar este trabajo en Congresos sobre enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería para comunicar y difundir la propuesta y sus resultados.

Materias	Temas	Conceptos						
		Limites	Continuidad	Derivada	Crecimiento y Decrecimiento	Max/Min	Inflexión	Concavidad
Edafología	Permeabilidad $ki = cd^2$	$ki = cd^2$ variable d ki es una función cuadrática	Por ser una función cuadrática ki es continua en todo su dominio	$(ki)' = 2cd \wedge (ki)'' = 2c$	$Si\ c > 0, ki > 0 \Rightarrow k$ es creciente $Si\ c < 0, ki < 0 \Rightarrow k$ es decreciente	si $Si\ c > 0\ (ki)'' = 2c > 0 \Rightarrow$ existe mínimo en $(0;0)$ si $Si\ c < 0 : ki = 2c < 0 \Rightarrow$ existe máximo en $(0;0)$	$ki = 0$ como $ki = 2c \neq 0$ (salvo para $c = 0$) no existe punto de inflexión	si $Si\ c > 0\ (ki)'' = 2c > 0$ Cóncava hacia arriba si $Si\ c < 0\ (ki)'' = 2c < 0$ Cóncava hacia abajo
Economía Agraria	Distribución Normal $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$		Por ser función exponencial, f es continua en todo su dominio.	$f'(x) = -f(x) \cdot \frac{(x-\mu)}{\sigma^2}$ $f''(x) = f(x) \frac{(x-\mu) - \sigma^2}{\sigma^4}$	$f'(x) = -f(x) \frac{(x-\mu)}{\sigma} > 0 \Rightarrow x > \mu$ f crece en $(\mu, +\infty)$ $f'(x) = f(x) \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} < 0 \Rightarrow x < \mu$ f decrece en $(-\infty, \mu)$	si $f'(x) = 0 \Rightarrow -f(x) \frac{(x-\mu)}{\sigma} = 0 \Rightarrow (x-\mu) = 0$ luego $x = \mu$ μ^- luego $f'(x) > 0$ μ^+ luego $f'(x) < 0$ por lo tanto existe un máximo en $(\mu; \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}})$	$f''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) \frac{(x-\mu) - \sigma^2}{\sigma^4} = 0$ Entonces en: $x = \mu \pm \sigma$ Presenta dos puntos de inflexión	$f''(x) > 0 \Rightarrow x > \mu \wedge x < \mu - \sigma$ f es cóncava hacia arriba en: $(-\infty, \mu - \sigma) \cup (\mu + \sigma, +\infty)$ f es cóncava hacia abajo en $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$
	Ecuación de Mitscherlich $y = A(1 - e^{-cx})$	$y = A(1 - e^{-cx})$ si calculamos $\lim_{x \rightarrow \infty} y = A$ Por existe una asíntota horizontal	Es continua	$y' = f'(x) = ce^{-cx}$	$y' = f'(x) = ce^{-cx}$ $f'(x) > 0 \quad \forall x$ es creciente	$y' = f'(x) = e^{-cx} = 0$ $\nexists x$ tal que $f'(x) = 0 \Rightarrow$ No existe máximo ni mínimo	$y'' = -ce^{-cx} = 0$ $\nexists x$ tal que $f''(x) = 0 \Rightarrow$ No existe punto de inflexión	$y'' = -ce^{-cx}$ Para cualquier valor de x $y'' = -ce^{-cx} < 0$ Es cóncava hacia abajo
Uso del Suelo	Determinación de textura $v = \frac{2}{9}g \frac{r^2(d_1 - d_2)}{n}$	$v = \frac{2}{9}g \frac{r^2(d_1 - d_2)}{n}$ $v = kr^2$ Función cuadrática que depende de r	Por ser v una función cuadrática, es continua en todo su dominio	$v' = \frac{4}{9}r \frac{(d_1 - d_2)}{n}$ $v'' = \frac{4}{9}g \frac{(d_1 - d_2)}{n}$	$v' = 2kr$ luego $v'' = 2kr$ $v' > 0$ si $r > 0$ crece para $(0, +\infty)$ $v' < 0$ si $r < 0$ decrece para $(-\infty, 0)$	$v' = \frac{4}{9}g \frac{r \cdot (d_1 - d_2)}{n} = 0 \Rightarrow$ en $r = 0$ existe un punto critico $v''(0) > 0 \Rightarrow$ en $r = 0$ Existe un mínimo	$v'' = \frac{4}{9}g \frac{(d_1 - d_2)}{n} \neq 0$ Salvo si $d_1 = d_2$ No existe punto de inflexión	$v'' = \frac{4}{9}g \frac{(d_1 - d_2)}{n} > 0$ luego v es concava hacia arriba
Fisiología Vegetal	Asenso capilar $h = \frac{\tau \cos \emptyset}{r \gamma g}$	$h = \frac{2\tau \cos \emptyset}{r \gamma g}$ función de variable r	La función es de tipo racional y es discontinua cuando $r = 0$ y presenta una asíntota vertical	$h' = -\frac{2\tau \cos \emptyset}{r^2 \gamma g}$ $h'' = \frac{4\tau \cos \emptyset}{r^3 \gamma g}$	$h' > 0 \Rightarrow -\frac{2\tau \cos \emptyset}{r^2 \gamma g} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\tau \cos \emptyset}{\gamma g} < 0$ $h' < 0 \Rightarrow -\frac{2\tau \cos \emptyset}{r^2 \gamma g} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\tau \cos \emptyset}{\gamma g} > 0$	$h' = 0$ solo ocurre cuando $r \rightarrow +\infty$, por lo tanto no admite máximo ni mínimo.	$h'' = 0$ Solo ocurre cuando $r \rightarrow +\infty$, por lo tanto no pose punto de inflexión.	$h'' > 0 \Rightarrow \frac{4\tau \cos \emptyset}{r^3 \gamma g} > 0 \Leftrightarrow \frac{4\tau \cos \emptyset}{\gamma g} > 0$ $h'' < 0 \Rightarrow \frac{4\tau \cos \emptyset}{r^3 \gamma g} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\tau \cos \emptyset}{\gamma g} < 0$
Hidrología agraria	Velocidad Media de Infiltración $V_i = kt^{-n}$	Limite cuando t tiende a valores altos se aproxima a valores próximos a 0. Cuando t tiende a cero, V_i tiende a valores altos.	Presenta una discontinuidad esencial en $t = 0$	$V'_i = -knt^{-n-1}$ $V''_i = kn(n-1)t^{-n-2}$	Analizando su derivada vemos que es decreciente en todo su dominio	$V'_i = -knt^{-n-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{t^{-(n+1)}} \neq 0$ No hay máximo ni mínimo	No existe punto de inflexión porque la derivada segunda no puede ser igual a 0	Es cóncava hacia arriba
Microbiología Agrícola	Bacterias		La función exponencial es continua en todo su domino Presenta una asíntota horiz. en $y = 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} ce^{kt} = \infty$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} ce^{kt} = 0$	$y = ce^{kt} \rightarrow y' = kce^{kt} \wedge y'' = k^2ce^{kt}$	$y' > 0$ o $y' < 0$ este último caso sería si $k < 0$ $kce^{kt} > 0$, pues $c > 0, k > 0 \wedge e^{kt} > 0, \forall t \in Dom\ y$ Luego, la función es creciente en todo su dominio.	$y' = 0 \Rightarrow kce^{kt} = 0$ Esto ssi: $kc = 0 \vee e^{kt} = 0$ Pero $k \neq 0 \wedge c \neq 0$ ademas $e^{kt} \neq 0$ Por lo tanto, la función no tiene máximo o mínimo	$y'' = 0$ pero $y'' = k^2ce^{kt} \neq 0$ Porque $k^2 \neq 0 \wedge c \neq 0 \wedge e^{kt} > 0$ Luego y no tiene punto de inflexión.	$y'' > 0$ Porque $k^2 > 0 \wedge c > 0 \wedge e^{kt} > 0$ La función es cóncava hacia arriba.

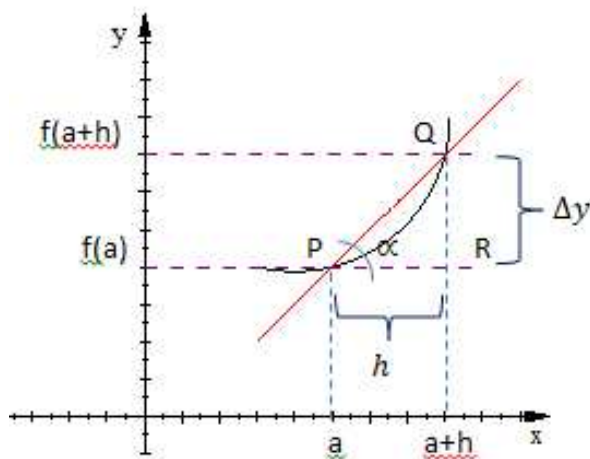
ANEXO II

GUÍA DE TRABAJOS PRACTICOS: DERIVADA – APLICACIONES DE LA DERIVADA

Tasa de Variación Media

Consideremos una función $y = f(x)$ además consideremos dos puntos próximos sobre el eje de abscisas " a " y " $a + h$ ", siendo " h " un número real que corresponde al incremento de x ($\Delta x = a + h$).

Se llama Tasa de Variación (TV) de la función en el intervalo $[a, a + h]$, que se representa por Δy , a la diferencia entre las ordenadas correspondientes a los puntos de abscisas a y $a + h$, $\Delta y = [f(a + h) - f(a)]$



Se llama Tasa de Variación Media (TVM) en el intervalo $[a, a + h]$, y se representa por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ó $\frac{\Delta y}{h}$, al cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo considerado sobre el eje de abscisas, h o Δx , esto es:

$$\text{TVM} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpretación geométrica

La expresión anterior coincide con la pendiente de la recta secante a la función $f(x)$, que pasa por los puntos de abscisas a y $a+h$.

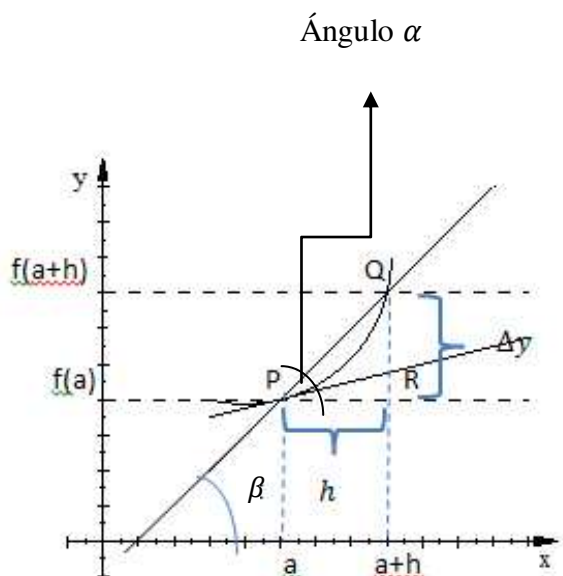
$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ya que en el triángulo PQR resulta que: $\text{tg } \alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Derivada de una función en un punto

La derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor del límite, si este existe, de un cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$



Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P . Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función $f(x)$ en P , y por tanto el ángulo α tiende a ser β .

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{h} \right) = f'(a)$$

La pendiente de la tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto.

$$m_{\text{tg}} = f'(a)$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 + 2$, en $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

- Calcule la Tasa de Variación Media
- Encuentre $f'(1)$

$$\text{a) } TVM = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} = 1$$

$$\text{b) } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+3-3}{h} = 2$$

Veamos qué pasa si hacemos más pequeño el intervalo, por ejemplo $[1, 1,05]$

$$\text{a) } TVM = \frac{f(1,05) - f(1)}{1,05 - 1} = \frac{3,1025 - 3}{1,05 - 1} = \frac{0,1025}{0,05} = 2,05$$

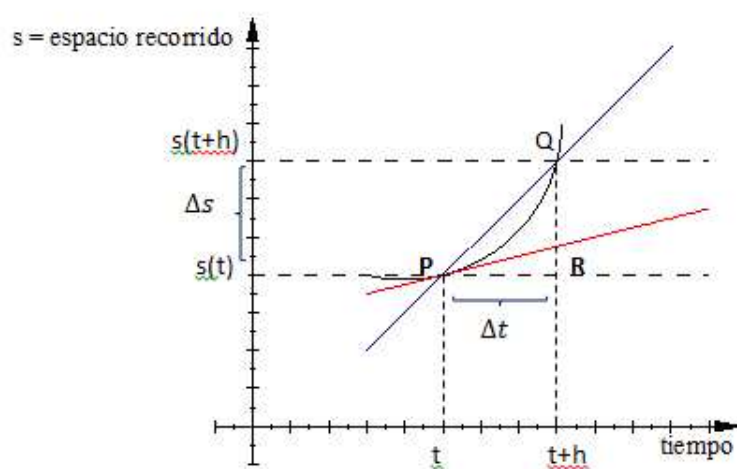
$$\text{b) } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+3-3}{h} = 2$$

$$TVM \cong f'(1)$$

Interpretación Física de la Derivada: Velocidad media

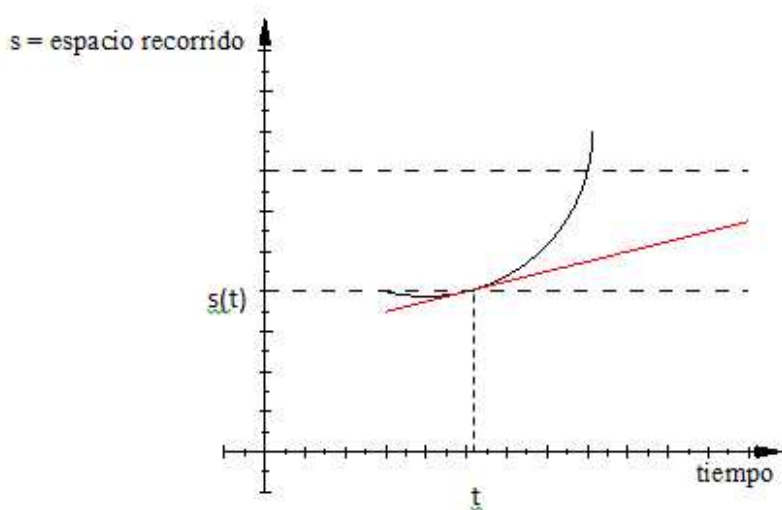
La velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido Δs y el tiempo transcurrido Δt

$$V_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$



Velocidad instantánea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right)$$



ACTIVIDADES

- 1) a) Encuentre la pendiente de la recta tangente al gráfico de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa considerado. b) Realice el gráfico aproximado de f y de la tangente y de la normal c) ¿qué sucede en $x = c$ cuando $f'(c) = 0$?

i) $f(x) = x^2 - 5x - 3$ en $c = 1$ ii) $g(x) = x^3 + 2$ en $c = 2$ iii) $h(x) =$

$\frac{1}{x}$ en $c = 1$

- 2) Aplicando la definición de derivada, calcular:

$f'(3)$ si $f(x) = 2x + 3$

$g'(2)$ si $g(x) = x^2$

$t'(4)$ si $t(x) = 5x - x^2$

- 3) i) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

ii) Halle la ecuación de la recta normal en dicho punto.

iii) Grafique la función, la recta tangente y la recta normal.

$$a) f(x) = \sqrt{x-2} \text{ en } x = 6 \quad b) f(x) = \sqrt{5x} \text{ en } x = 5$$

4)

a) ¿En qué punto la parábola de ecuación $y = 4 - 2x^2$ tiene una tangente paralela a la recta $8x + 3y = 4$.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4$ que sea paralela a la recta $3x + y = 4$.

c) Indique para cada función los puntos del gráfico donde la pendiente es horizontal

$$f(x) = x^2 + 2x \quad ; \quad g(x) = 4x^2 - 24x + 36 \quad ; \quad h(x) = \frac{x}{9-x}$$

d) Indique para cada función los puntos del gráfico donde la pendiente es igual 9

$$i) f(x) = x^3 - 9x^2 + 36x \quad ii) f(x) = x^2 - 12x^3$$

e) Indicar en que puntos la tangente al gráfico de f forma con el eje positivo de

$$\text{abscisas un ángulo de } 45^\circ \text{ si } f(x) = \frac{x^4}{4} - 7x + 17$$

f) En qué puntos la recta tg tiene pendiente igual a 2 siendo: $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 14x - 7$

4) Derive, aplicando reglas de derivación:

$$a) f(x) = (2x-1) \cdot (3x+5) \quad b) f(x) = (2x-3) \cdot (x^2+1) \quad c) f(x) = \frac{2-x}{3x-1}$$

$$d) f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad e) \sin(5^2 + 3x) \quad g) f(x) = \cos(\sqrt{x}) \quad h) f(x) = \sin(x^2)$$

5) Halle la diferencial de y . ($dy = f'(x) \cdot dx$)

$$a) f(x) = 4x^2 - x^3 \quad b) f(x) = (1 - x^2) \quad c) f(x) = (2 - x^2) \cdot (x - 2)^3$$

$$d) f(x) = \frac{2x-3}{1-x^3}$$

- 6) La superficie de una esfera es $S = 4\pi r^2$. Halle la tasa instantánea de cambio de S con respecto a r cuando $r = 2$.
- 7) Demuestre que la tasa instantánea de cambio del volumen de un cubo en función de la medida x de su arista es la mitad del área.

Aplicaciones de la Derivada

1. Halle los puntos críticos de las funciones dadas:

$$a) f(x) = \frac{x^2}{x-2} \quad b) f(x) = 12x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} \quad c) f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)$$

2. En los problemas siguientes se pide:

- i) Valores críticos
- ii) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
- iii) Extremos relativos, por algún criterio.
- iv) Concavidad y puntos de inflexión.
- v) Represente gráficamente la función

$$a) f(x) = x^3 - x^2 - x \quad b) f(x) = x^3 - 9x^2 \quad c) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$$

$$d) f(x) = 2(x+20)^2 - 8(x+20) + 7 \quad e) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 2$$

$$g) f(x) = 1 + 2x + \frac{18}{x} \quad h) f(x) = x^3 - 3x^2 \quad i) f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$$

- 6) Halle el c , correspondiente al teorema de Rolle, para:

$$a) f: x \mapsto 3 + 2x - x^2 \text{ en } [2,4] \quad g: x \mapsto x^4 - 4x^3 + 10 \text{ en } [0,4]$$

$$h: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1 \text{ en } [-1,2]$$

7) Halle el c correspondiente al teorema del Valor Medio para:

$$a) f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \text{ en } [-1,3] \quad g(x) = \sqrt{x-1} \text{ en } [1,5]$$

b) Un vehículo tiene una velocidad promedio de 120 km/h, en el intervalo de tiempo $[4, 10]$

¿Existe algún instante $t_0 \in (4, 10)$ tal que $v(t_0) = 120$ km/h? Justifique la respuesta con algún teorema y escriba la interpretación geométrica de dicho teorema, auxiliándose con un gráfico.

8) La velocidad en m/seg que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dada en función del espacio recorrido, x , por la siguiente expresión: $f(x) = -0,0005 x (x - 300)$. Encuentre:

- a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima? ¿Cuál es esa velocidad?
- b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando? ¿Y disminuyendo?
- c) ¿A qué velocidad llega a la meta?

9) Demuestre que el rectángulo de perímetro fijo y área máxima es el cuadrado.

10) Determine un número del intervalo $\left[\frac{1}{3}, 2\right]$ tal que la suma del número y su recíproco sea

(a) un mínimo y (b) un máximo. Represente gráficamente.

11) Determine un número del intervalo $[-1,1]$ tal que la diferencia del número menos su cuadrado sea (a) un máximo y (b) un mínimo. Represente gráficamente.

12) La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde el comienzo del estudio ($t = 0$). Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas ¿Cuánto valen los valores máximo y mínimo? ¿Los intervalos en que esta crece y decrece?

13) En 1980 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años de acuerdo con la función.

$$N(x) = 50(2x^3 - 15x^2 + 36x + 2)$$

a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores?

b) ¿En qué períodos de tiempo aumenta el número de socios?

ANEXO III

Encuesta antes

Con respecto a la Derivada y sus aplicaciones, evalúe por favor su experiencia

		1	2	3	4	5	
A ₁	No se aplica derivada a la agronomía	21	15	22	11	10	Se aplica derivada a la agronomía
B ₁	No se entiende el tema claramente	20	17	25	12	5	Se entiende el tema claramente
C ₁	No puedo resolver los ejercicios	13	13	16	17	20	Si puedo resolver los ejercicios
D ₁	No entiendo los problemas de aplicación	28	17	13	11	10	Si entiendo los problemas de aplicación

Encuesta despues

Con respecto a la Derivada y sus aplicaciones en el Sistema de Tareas, evalúe por favor su experiencia

		1	2	3	4	5	
A ₂	No se aplica derivada a la agronomía	8	15	18	16	22	Se aplica derivada a la agronomía
B ₂	No se entiende el tema claramente	12	17	25	12	13	Se entiende el tema claramente
C ₂	No puedo resolver los ejercicios	18	8	16	17	20	Si puedo resolver los ejercicios
D ₂	No entiendo los problemas de aplicación	12	13	15	16	23	Si entiendo los problemas de aplicación

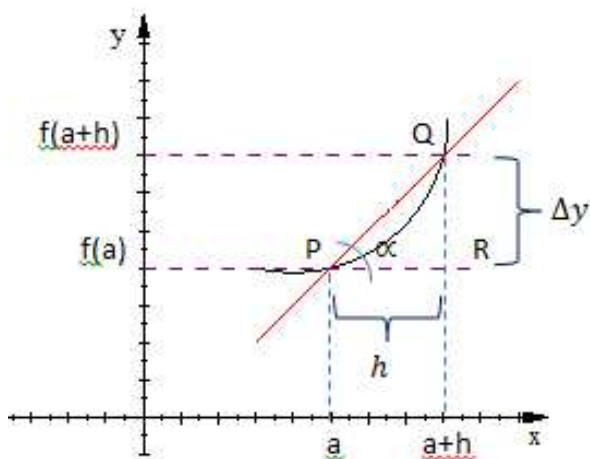
ANEXO IV

Teoría de Apoyo para el Sistema de Tareas

Tasa de Variación Media

Consideremos una función $y = f(x)$ además consideremos dos puntos próximos sobre el eje de abscisas " a " y " $a + h$ ", siendo " h " un número real que corresponde al incremento de x ($\Delta x = a + h$).

Se llama Tasa de Variación (TV) de la función en el intervalo $[a, a + h]$, que se representa por Δy , a la diferencia entre las ordenadas correspondientes a los puntos de abscisas a y $a + h$, $\Delta y = [f(a + h) - f(a)]$



Se llama Tasa de Variación Media (TVM) en el intervalo $[a, a + h]$, y se representa por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ó $\frac{\Delta y}{h}$, al cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo considerado sobre el eje de abscisas, h o Δx , esto es:

$$\text{TVM} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpretación geométrica

La expresión anterior coincide con la pendiente de la recta secante a la función $f(x)$, que pasa por los puntos de abscisas a y $a+h$.

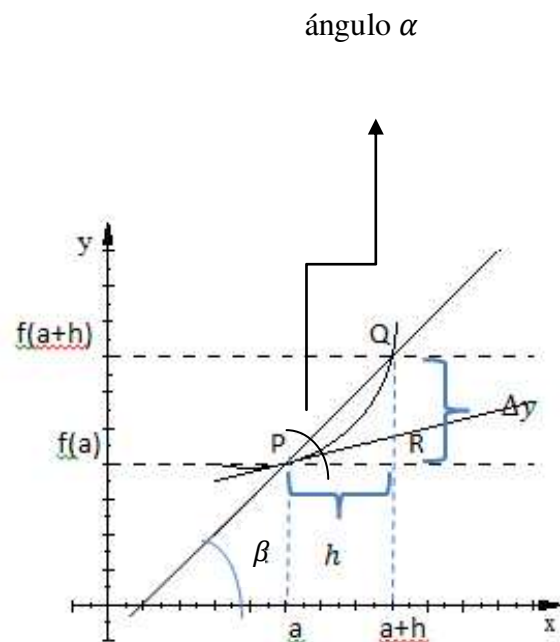
$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ya que en el triángulo PQR resulta que: $\text{tg } \alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Derivada de una función en un punto

La derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor del límite, si este existe, de un cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right)$$



Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P . Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función $f(x)$ en P , y por tanto el ángulo α tiende a ser β .

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{h} \right) = f'(a)$$

La pendiente de la tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto.

$$m_{\text{tg}} = f'(a)$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 + 2$, en $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

a) Calcule la Tasa de Variación Media

b) Encuentre $f'(1)$

$$\text{a) } TVM = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} = 1$$

$$\text{b) } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+3-3}{h} = 2$$

Veamos qué pasa si hacemos más pequeño el intervalo, por ejemplo $[1, 1,05]$

$$\text{a) } TVM = \frac{f(1,05) - f(1)}{1,05 - 1} = \frac{3,1025 - 3}{1,05 - 1} = \frac{0,1025}{0,05} = 2,05$$

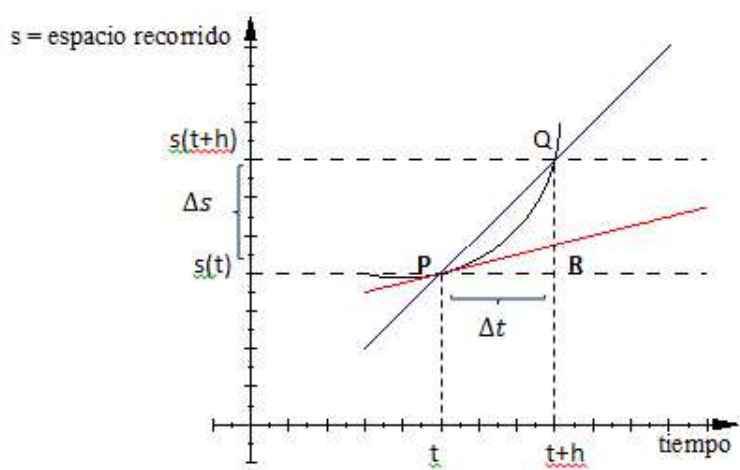
$$\text{b) } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+3-3}{h} = 2$$

$$TVM \cong f'(1)$$

Interpretación Física de la Derivada: Velocidad media

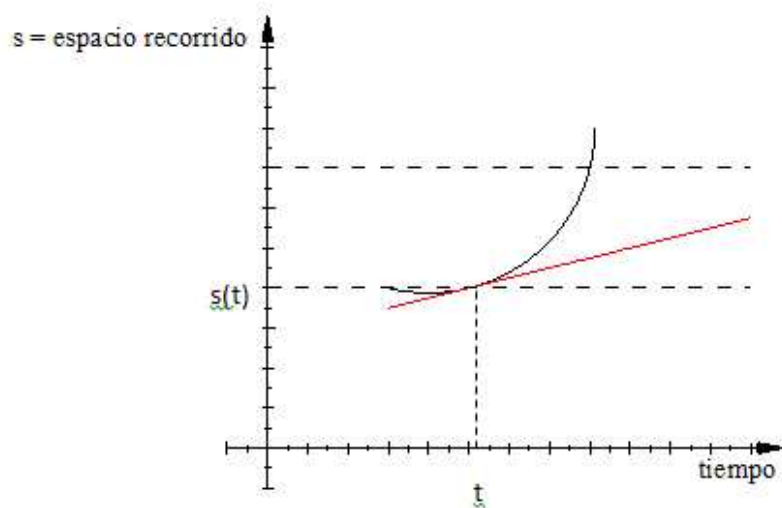
La velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido Δs y el tiempo transcurrido Δt

$$V_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$



Velocidad instantánea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right)$$



ANEXO V: Pretest

- 1) ¿Es posible calcular de dos maneras diferentes: $f'(1)$ siendo $f(x) = 2x - x^2$.

Fundamente su respuesta

- 2) El trayecto de un cohete antigranizo responde a la ecuación $s(t) = t - 120 t^2$, ¿es posible que, derivando de dos maneras diferentes, encontrar la velocidad máxima que el proyectil alcanza? Justifique su respuesta realizando la grafica correspondiente.
- 3) Se quiere cercar un terreno rectangular con 300 m de tela metálica ¿Cuál es el área máxima que se puede encerrar? y ¿Cuáles sus dimensiones?
- 4) Se quiere construir un abrevadero para animales que tenga forma de un prisma rectangular y pueda contener 1000 litros de agua. Un lado mide el doble del otro, y su altura es de 1 metro. ¿Cuál será la mínima cantidad de material que se utilizará?

Acciones a evaluar:

Problema 1 para evaluar GC

- 1) Deriva correctamente la función aplicando la definición.
- 2) Deriva correctamente aplicando reglas de derivación.
- 3) Realiza correctamente el procedimiento.
- 4) Justifica correctamente con el grafico.

Acciones a evaluar:

Problema 2 para evaluar GI

- 1) Escribe la definición de derivada.
- 2) Resuelve correctamente el límite.
- 3) Aplica reglas de derivación.
- 4) Responde correctamente.

ANEXO VI: Post test

- 1) El análisis de la variación temporal del nitrato contenido en el extracto del estiércol de vaca fresco tiene una variación que responde aproximadamente a la ecuación cuadrática: $y = 75,95 - 47,50 t - 2,37 t^2$ con t en días. ¿En qué día será la máxima concentración de nutrientes?. Justifique su respuesta. Grafique y deduzca en el mismo cual es el dominio dentro del contexto del problema.
- 2) Una empresa vende un fertilizante a \$ 50 por bolsa. El costo total de colocar en el mercado x bolsas esta dado por la función: $f(x) = 5000 + 650x - 45x^2 + \frac{4}{9}x^3$. ¿Cuántas bolsas deberán producirse al día para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este número de bolsas?
- 3) Se sembró una variedad de lechuga en determinada parcela de 300 m² agregando al suelo los fertilizantes y nutrientes necesarios y se fueron extrayendo muestras deduciéndose que la Tasa de Crecimiento Relativo y en $\left[\frac{\text{gramos}}{\text{día}}\right]$ respondía a la ecuación: $y = \frac{951,07}{1+191,58 e^{0,042 t}}$ donde y es TCR y t es tiempo en días. ¿A los cuantos días tendrá la mayor Masa Seca (MS)? ¿Cuál es ese valor? – Grafique.
- 4) Los costos de la producción $C(x)$ en pesos de cierta variedad de papa depende de la cantidad producida (x en toneladas) de acuerdo con la siguiente expresión: $C(x) = 10 + 322,8 x^2$ y se estima que el precio de cada kilo de papas viene dado por: $P(x) = 7x^2$

Problema 1 para medir el GC

- 1) Realiza correctamente el procedimiento para encontrar el máximo.
- 2) Justifica correctamente en que día será la máxima concentración.
- 3) Realiza la grafica correctamente
- 4) Deduce correctamente el dominio dentro del contexto del problema

Problema 2 para medir el GI

- 1) Realiza correctamente el procedimiento para encontrar el máximo.
- 2) Interpretar el valor obtenido del tiempo t en el paso anterior
- 3) Encontrar el valor de la MS correspondiente al tiempo t
- 4) Grafica correctamente.